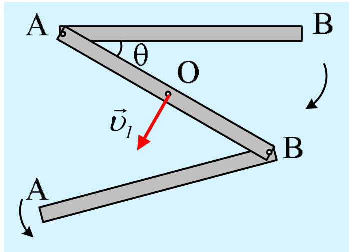
Μια αλλαγή άξονα περιστροφής.



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο της Α. Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε να κινηθεί, οπότε τη στιγμή t_1 που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία θ, το μέσον Ο της ράβδου έχει ταχύτητα υ_1=3m/s.

i) Να υπολογιστεί η στροφορμή της ράβδου τη στιγμή t_1, ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος περνά:

α) Από το κέντρο μάζας Ο της ράβδου.

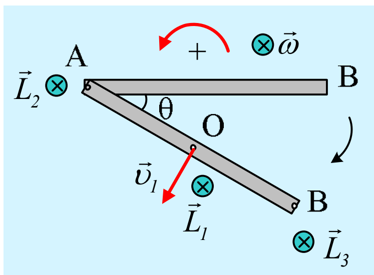
β) Από το άκρο Α της ράβδου.

γ) Από το άκρο της Β.

ii) Τη στιγμή t_1, ο άξονας περιστροφής σπάει και αμέσως μετά η ράβδος αρχίζει να στρέφεται γύρω από δεύτερο σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στη ράβδο, ο οποίος περνά από το άκρο της Β. Ποια η ταχύτητα υ_2 του μέσου Ο της ράβδου, μόλις αρχίσει η περιστροφή γύρω από τον άξονα που περνά από το άκρο Β;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της $I= ml^2/12$.

Απάντηση:



i) Τη στιγμή t_1 η ράβδος στρέφεται γύρω από το άκρο Α έχοντας γωνιακή ταχύτητα ω_1, οπότε, αν l το μήκος της ράβδου, τότε η ταχύτητα του Ο είναι ίση με

$$\upsilon_1 = \omega_1 \cdot \frac{l}{2} \quad (1)$$

Αυτή η γωνιακή ταχύτητα είναι ίδια ως προς οποιονδήποτε άξονα και αν θεωρήσουμε ότι έχουμε περιστροφή. Συνδέεται μόνο με την αλλαγή του προσανατολισμού της ράβδου.

Στο σχήμα έχουν σημειωθεί επίσης και τα διανύσματα της στροφορμής, ως προς τους τρεις άξονες που αναφέρονται.

α) Θεωρώντας θετική φορά την κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη, ως προς το κέντρο μάζας Ο η ιδιοστροφορμή είναι ίση:

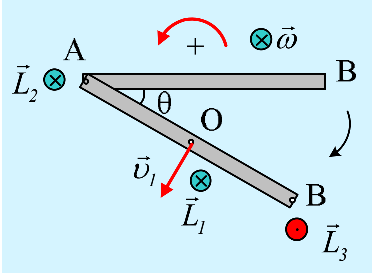
$$L_1 = -I_{cm}\omega_1 = -\frac{1}{12}ml^2 \cdot \frac{\upsilon_1}{l/2} = -\frac{1}{6}m\upsilon_1 l$$

β) Η στροφορμή ως προς το Α, θα είναι το άθροισμα της παραπάνω ιδιοστροφορμής και της τροχιακής στροφορμής για την κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας Ο:

$$L_2 = -I_{cm}\omega_1 - m\upsilon_1 \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{6}m\upsilon_1 l - m\upsilon_1 \cdot \frac{l}{2} = -\frac{2}{3}m\upsilon_1 l$$

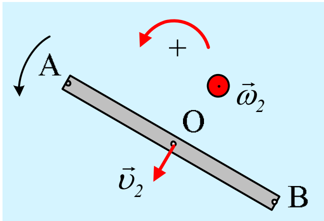
γ) Με την ίδια λογική, ως προς το B, ράβδος έχει στροφορμή:

$$L_3 = -I_{cm}\omega_1 + m\upsilon_1 \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{6}m\upsilon_1 l + m\upsilon_1 \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{3}m\upsilon_1 l$$



Βρήκαμε θετική στροφορμή ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από το Β, οπότε το διάνυσμα έχει φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο διπλανό σχήμα και όχι όπως το είχαμε σχεδιάσει αρχικά.

ii) Για το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να «προσδεθεί» η ράβδος στον άξονα που περνά από το άκρο Β, δέχτηκε μια δύναμη στο άκρο αυτό, αποτέλεσμα της οποίας ήταν να μηδενιστεί η ταχύτητα του άκρου Β και ταυτόχρονα να αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής από ω_1 σε ω_2, αντίθετης κατεύθυνσης, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε η νέα ταχύτητα υ_2 και η νέα γωνιακή ταχύτητα ω_2, συνδέονται με την εξίσωση (1):



$$\upsilon_2 = \omega_2 \cdot \frac{l}{2} \quad (1^\alpha)$$

Αφού τώρα το Ο εκτελεί μια νέα κυκλική κίνηση γύρω από το Β!

Αν όλα αυτά συνέβησαν σε χρόνο dt, τότε η ασκούμενη δύναμη F στο άκρο Β είναι κρουστική, προφανώς πολύ μεγαλύτερου μέτρου από το όποιο βάρος της ράβδου. Μπορούμε αν θέλουμε να φανταστούμε μια κρούση του άκρου Β με ένα ακίνητο εμπόδιο, στο οποίο ταυτόχρονα προσκολλάται το άκρο Β της ράβδου. Έτσι εφαρμόζουμε για την ράβδο την αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς το άκρο Β, όπου μηδενίζεται η ροπή της δύναμης F:

$$\vec{L}_{t_1^-} = \vec{L}_{t_1^+} \rightarrow \frac{1}{3}m\upsilon_1 l = I_B\omega_2 \rightarrow \frac{1}{3}m\upsilon_1 l = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}\right)\omega_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{3}m\upsilon_1 l = \frac{1}{3}ml^2\omega_2 \rightarrow \upsilon_1 = \omega_2 l \quad (2) \xrightarrow{(1a),(2)}$$

$$\upsilon_2 = \omega_2\frac{l}{2} = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{3}{2}m/s = 1{,}5m/s$$

dmargaris@gmail.com