Εξισώσεις ΑΑΤ

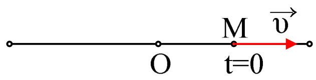
Ένα υλικό σημείο κάνει α.α.τ. με πλάτος 0,1m και στην αρχή των χρόνων, βρίσκεται σε σημείο Μ με απομάκρυνση 5cm, απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας. Μετά από 1s περνά ξανά από το Μ για πρώτη φορά με αντίθετη ταχύτητα.

i) Βρείτε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Ποια η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο; Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Απάντηση:

Αφού για t=0 το σώμα δεν περνά από τη θέση ισορροπίας, υπάρχει αρχική φάση $φ_0$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:



$$x=Aημ(ωt+φ_0) \quad (1)$$

i) Για t=0 έχουμε $0,05= 0,1ημ(ω\cdot 0+φ_0) \rightarrow 0,05 = 0,1\ ημφ_0 \rightarrow ημφ_0=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} φ_0 = 2κπ+\frac{\pi}{6} \xrightarrow{κ=0} \phi_0 = \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ φ_0 = 2κπ+π-\frac{\pi}{6} \xrightarrow{κ=0} \phi_0 = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Για να επιλέξουμε μία από τις παραπάνω τιμές αρχικής φάσης, παίρνουμε την εξίσωση της ταχύτητας $υ=Aωσυν(ωt+φ_0)$ που για t=0 δίνει:

$υ=Aωσυν\frac{\pi}{6} >0$ δεκτή λύση ή

$υ =Aω\ συν\ 5\frac{\pi}{6} <0$ απορρίπτεται

αφού το κινητό κινείται προς τα δεξιά την οποία πήραμε σαν θετική φορά.

Άρα $φ_0 = \frac{\pi}{6}$. Οπότε παίρνοντας ξανά την εξίσωση (1) για t=1s έχουμε

$$1=2ημ(ω+\frac{\pi}{6}) \rightarrow ημ(ω+\frac{\pi}{6})= \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} ω+\frac{\pi}{6} = 2κπ+\frac{\pi}{6} \xrightarrow{κ=0} ω= 2π \quad (2) \\ \text{ή} \\ ω+\frac{\pi}{6} = 2κπ+π-\frac{\pi}{6} \xrightarrow{κ=0} ω= \frac{2π}{3}. \quad (3) \end{cases}$$

Ποια από τις (2) και (3) είναι η σωστή λύση;

Βρίσκοντας την περίοδο, από την (2) έχουμε $T= \frac{2\pi}{\omega} = 1s$

ενώ από την (3) T=3s. Με βάση τα δεδομένα η περίοδος προφανώς είναι μεγαλύτερη από 1s, άρα

$\omega = \frac{2\pi}{\omega}$.

Έτσι οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

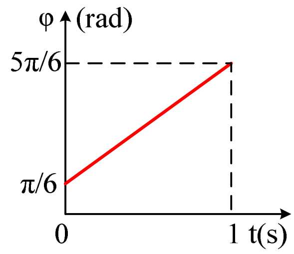
$$x = 0{,}1\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m) και}$$

$$\upsilon = 0{,}1 \cdot \frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{15}\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m/s).}$$

Η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης μας είναι:

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}$$

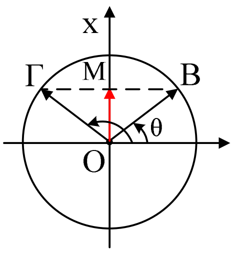
και η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Τι λέτε, έχει φασαρία; Υπάρχει και άλλη λύση…

β) Να χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς. Το σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση για t=0 βρίσκεται στις θέσεις Β ή Γ, όπου η γωνία θ=30°.

Αν βρισκόταν στη θέση Γ θα πλησίαζε προς τον οριζόντιο άξονα, άρα το υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση θα εκινείτο προς τη θέση ισορροπίας, πράγμα που δεν ισχύει.



Τι συμβαίνει με τη θέση Β;

Αφού λοιπόν αρχικά βρίσκεται στη θέση Β η αρχική του φάση είναι $\varphi_0 = \theta = \frac{\pi}{6}$ και το σώμα θα ξαναβρίσκεται στο σημείο Μ, όταν το περιστρεφόμενο διάνυσμα φτάσει στη θέση Γ. Θα διαγράψει δηλαδή γωνία $B\hat{O}\Gamma = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του διανύσματος είναι:

$\omega = \frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi}{3}$ ………..

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης