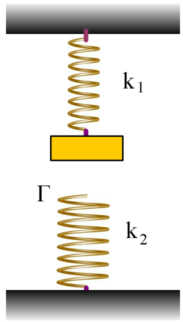
Ένα σώμα δύο ταλαντώσεις.

Ένα σώμα, μάζας 2kg, ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k_1=200N/m, όπως στο σχήμα, απέχοντας κατά 10cm, από ένα δεύτερο κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k_2=200N/m που στηρίζεται στο έδαφος.



Μετακινούμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι να συσπειρωθεί το ελατήριο κατά d=0,2m και σε μια στιγμή, το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

i) Με ποια ταχύτητα φτάνει το σώμα στη θέση Γ;

ii) Μόλις το σώμα φτάσει στο Γ, το πάνω ελατήριο λύνεται, οπότε το σώμα ταλαντώνεται στο πάνω άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_2. Να υπολογιστεί το πλάτος ταλάντωσης.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται το σώμα από το πάνω ελατήριο, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, θεωρώντας θετική, την προς τα κάτω φορά.

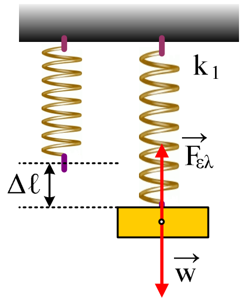
Θεωρείστε ότι και στις δύο περιπτώσεις το σώμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς, ίση με την εκάστοτε σταθερά του ελατηρίου και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Το σώμα ισορροπεί στο άκρο του ελατηρίου, προκαλώντας του επιμήκυνση:

$$\Sigma F = 0 \;\rightarrow\; k_1 \cdot \Delta\ell = mg \;\rightarrow$$

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k_1} = \frac{20N}{200N/m} = 0{,}1m$$



Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του, (με σταθερά επαναφοράς D=k_1), από την πάνω ακραία θέση, αφού αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, άρα το πλάτος ταλάντωσης θα είναι A_1=Δℓ+d=0,3m. Τη στιγμή που φτάνει στη θέση Γ, έχοντας απομάκρυνση y_1 από τη θέση ισορροπίας του (όπου y_1=0,1m ή y_1=-0,1m ανάλογα με ποια φορά θα λάβουμε ως θετική), θα έχει ταχύτητα που μπορεί να υπολογιστεί από την ενέργεια ταλάντωσης, η οποία παραμένει σταθερή.

$$E = U + K \quad ή$$

$$½\, D \cdot A_1^2 = ½\, D \cdot y_1^2 + ½\, m\upsilon_1^2 \quad άρα:$$

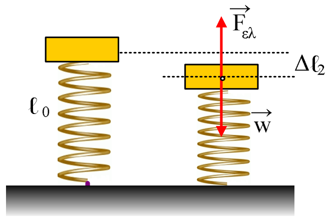
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}(A_1^2 - y_1^2)} \quad (1)$$

και με αντικατάσταση:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{200}{2}(0{,}3^2 - 0{,}1^2)}\,m/s = 2\sqrt{2}\,m/s$$

Ας σημειωθεί ότι η εξίσωση (1) μας δίνει το μέτρο της ταχύτητας και όχι την αλγεβρική τιμή της, συνεπώς δεν έχει νόημα να βρούμε $\pm 2\sqrt{2}\,m/s$.

ii) Παίρνουμε το σώμα στη θέση ισορροπίας του, για την δεύτερη ταλάντωση που ξεκινά σε επαφή με το κάτω ελατήριο. Για τις δυνάμεις (με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε):



$$ΣF = 0 \;\rightarrow\; k_2 \cdot Δ\ell_2 = mg \;\rightarrow$$

$$Δ\ell_2 = \frac{mg}{k_2} = \frac{20N}{200N/m} = 0{,}1m$$

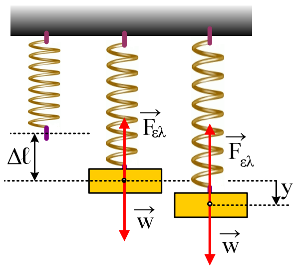
Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, ενώ τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωσή του απέχει κατά $y_2 = Δ\ell$ από τη θέση ισορροπίας του, συνεπώς:

$$E = U + K \quad ή$$

$$½\, D \cdot A_2^2 = ½\, D \cdot y_2^2 + ½\, mυ_1^2 \quad ή$$

$$A_2 = \sqrt{y_2^2 + \frac{m}{k_2}υ_1^2} = \sqrt{0{,}01 + \frac{2}{200}8m} = 0{,}3m$$

iii) Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση, που απέχει κατά y από τη θέση ισορροπίας. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.



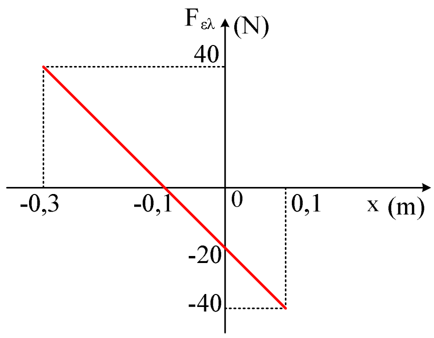
Έχουμε: $ΣF = -D \cdot y$ ή

$$w + F_{ελ} = -k_1 \cdot y \quad (2) \quad ή$$

$$F_{ελ} = -k_1 \cdot y - mg \quad ή$$

$$F_{ελ} = -20 - 200 \cdot y \quad (S.I.)$$

Έτσι η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.



Σχόλιο:

Η σχέση (2) είναι αλγεβρική, έτσι παρόλο που η δύναμη έχει σχεδιαστεί στο σχήμα προς τα πάνω, δεν βάζουμε $-F_{ελ}$, αφού πρώτον δεν είναι πάντα προς τα πάνω και δεύτερον μας ενδιαφέρει η αλγεβρική της τιμή και όχι το μέτρο της.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης