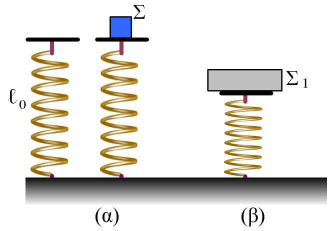
Δυο κατακόρυφες ταλαντώσεις.



Ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο, έχει σταθερά k=400N/m και στηρίζεται με το ένα του άκρο στο έδαφος, έχοντας το φυσικό του μήκος

i) Σε μια στιγμή αφήνουμε πάνω του ένα σώμα Σ, μάζας m=1kg (σχήμα α). Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει α.α.τ. και να βρείτε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσής του.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού θεωρείστε την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.

iii) Πάνω στο ίδιο ελατήριο ηρεμεί ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=3kg (σχήμα β). Τοποθετούμε τώρα για t=0 το σώμα Σ, πάνω στο $Σ_1$ και τα αφήνουμε να ταλαντωθούν. Πόσο είναι τώρα το πλάτος και η περίοδος ταλάντωσης; Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ, από το $Σ_1$ σε συνάρτηση:

α) με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και

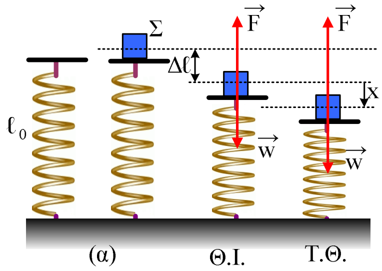
β) με το χρόνο.

Δεχτείτε ξανά την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Βρίσκουμε αρχικά τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ.



$$\Sigma\vec{F}=0 \text{ ή } k\cdot\Delta\ell=mg$$

Συνεπώς Δℓ=mg/k = 0,025m

Για την τυχαία θέση έχουμε:

$$\Sigma F= mg-k(\Delta\ell+x) = mg-k\cdot\Delta\ell-kx = -kx$$

Όπου x η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας. Αφού λοιπόν η συνισταμένη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης, το σώμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά D=k. Η αρχική θέση του σώματος είναι και ακραία θέση, αφού η ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=Δℓ=0,025m.

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}s=0{,}1\pi\ s.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής $x=A\cdot ημ(ωt+φ_0)$ και αφού το σώμα ξεκινά από την ακραία θετική απομάκρυνσή του, για t=0, έχουμε:

$$A=A\cdot ημφ_0 \rightarrow φ_0=\frac{\pi}{2}$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$x=A\cdot ημ(ωt+φ_0)=0{,}025\cdot ημ(20t+\frac{\pi}{2})\ \ (S.I.)$$

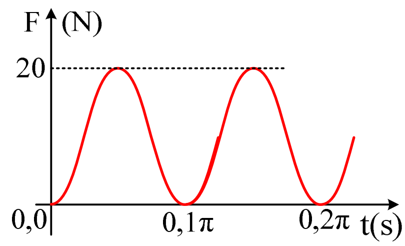
Εξάλλου από τη δύναμη επαναφοράς παίρνουμε:

$$\Sigma F= -kx \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda}-mg= -kx \text{ ή}$$

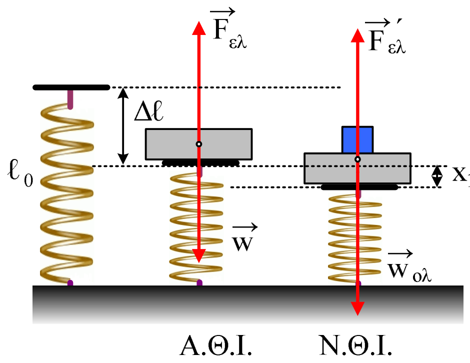
$$F_{\varepsilon\lambda}=10N-400\cdot 0{,}025\cdot \eta\mu(20t+\frac{\pi}{2})\ N \text{ ή}$$

$$F_{\varepsilon\lambda}=10-10\cdot \eta\mu(20t+\frac{\pi}{2})\quad (S.I.)$$

Η ζητούμενη λοιπόν γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στην αρχική θέση ισορροπίας του, καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο σωμάτων μετά την τοποθέτηση του σώματος Σ.



Για την αρχική θέση ισορροπίας:

$$\Sigma\vec{F}=0 \text{ ή } k\cdot\Delta\ell=m_1 g$$

Για την νέα θέση ισορροπίας:

$$\Sigma\vec{F}=0 \text{ ή}$$

$$k\cdot(\Delta\ell+x_1)=(m_1 g+mg) \text{ ή } k\cdot x_1=mg \rightarrow$$

$$x_1=\frac{mg}{k}=0{,}025m$$

Αλλά η αρχική θέση ισορροπίας, είναι ταυτόχρονα και ακραία θέση για την ταλάντωση που θα εκτελέσει το σύστημα. Συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=0,025m.

Παρατηρείστε ότι το νέο πλάτος που βρήκαμε είναι ίσο με το πλάτος στο πρώτο ερώτημα, που το σώμα αφέθηκε στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου.

Η νέα περίοδος ταλάντωσης θα είναι:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{4}{400}}s=0{,}2\pi\ s.$$

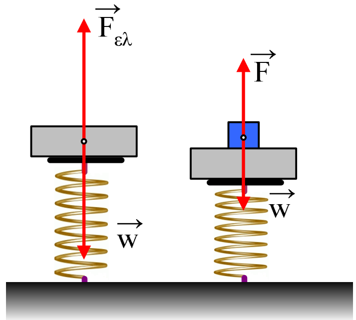
Εξάλλου δουλεύοντας όπως στο ii) ερώτημα βρίσκουμε:

$$A=A\cdot\eta\mu\varphi_0 \rightarrow \varphi_0=\frac{\pi}{2}$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega_1 t+\varphi_0)=0{,}025\cdot\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, σε μια τυχαία θέση, όπου F η δύναμη από το σώμα $Σ_1$.



Αριστερά το $Σ_1$ πριν την τοποθέτηση του Σ.

Δεξιά οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ

σε μια τυχαία θέση.

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ, παίρνουμε:

$$ΣF=m\cdot α \text{ ή } F-mg=m\cdot α \text{ ή } F= mg + m\cdot(-ω^2x) \text{ ή}$$

$$F= mg - m\cdot ω^2\cdot x \qquad (1)^*$$

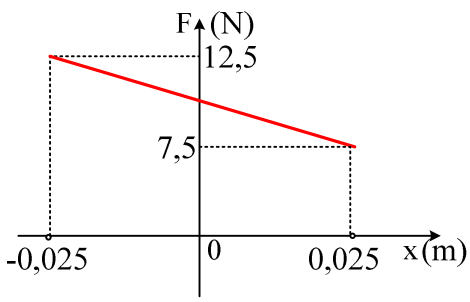
$$F= 10 – 2{,}5\,x \quad (S.I.)$$

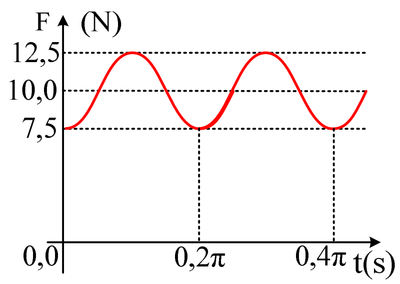
Και με αντικατάσταση της τιμής του x:

$$F= 10 – 1\cdot 10^2\cdot 0{,}025\cdot ημ(10t+\frac{\pi}{2}) \ (S.I.) \text{ ή}$$

$$F= 10 - 2{,}5\cdot ημ(10t+\frac{\pi}{2}) \quad (S.I.)$$

Οι ζητούμενες λοιπόν γραφικές παραστάσεις είναι:





* Συνήθως το γινόμενο $mω^2$ ονομάζεται σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ, δηλαδή $D_Σ=mω^2$, που προφανώς έχει διαφορετική τιμή από τη σταθερά του ελατηρίου.

Σχόλιο:

Και αν η θετική φορά ήταν προς τα κάτω, πώς θα βρίσκαμε την τιμή της F για να κάναμε γραφική παράσταση; Θα δουλεύαμε τη σχέση:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha$$

Αλγεβρικά, δηλαδή: $F + mg = m \cdot \alpha$ ……

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης