Ταλάντωση, γραφικές παραστάσεις και ρυθμοί μεταβολής

Σώμα μάζας m=2Kg ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο έδαφος. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι) προς τα πάνω μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και από τη θέση αυτή εκτοξεύουμε το σώμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \sqrt{3}\, m/s$ και με φορά προς τα κάτω. Η αντίσταση από τον αέρα θεωρείται αμελητέα, αρχή μέτρησης του χρόνου (t=0) λαμβάνουμε τη στιγμή της εκτόξευσης, θετική φορά λαμβάνουμε προς τα πάνω (τη φορά της αρχικής εκτροπής από τη Θ.Ι) και $g = 10\, m/s^2$. Το σώμα αμέσως μετά την εκτόξευσή του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς ίση με τη σταθερά σκληρότητας του ελατηρίου.

i) Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς καθώς και το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

ii) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της φάσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο: x-t , υ-t , α-t.

iv) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του από τη Θ.Ι είναι

$$x_1 = -0{,}1\sqrt{3} m/s$$

v) Να βρείτε το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί για 1η φορά μετά από τη στιγμή t=0, σε ακραία θέση της ταλάντωσής του.

vi) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα να βρείτε τη μεταβολή της ορμής του σώματος, το έργο της δύναμης επαναφοράς καθώς και το έργο της δύναμης του ελατηρίου.

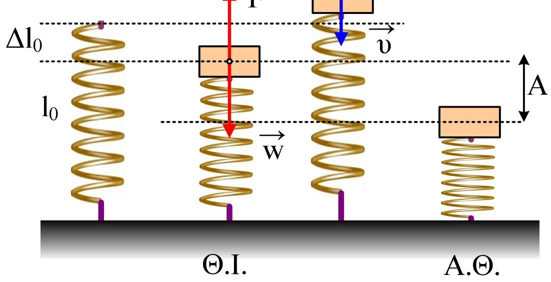
vii) Τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία για πρώτη φορά, μετά τη στιγμή t=0, η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, να βρείτε:

a) το ρυθμό μεταβολής της ορμής
b) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος
c) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης
d) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας
e) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Απάντηση

Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας με γωνιακή συχνότητα:

$$D = k = m\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$



Η απομάκρυνση της θέσης έναρξης της ΑΑΤ από τη Θ.Ι, είναι ίση με την αρχική συσπείρωση του ελατηρίου:

$$x = \Delta l_o = \frac{mg}{k} \Leftrightarrow x = \Delta l_o = 0{,}1m$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος της ΑΑΤ εξισώνουμε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση έναρξης με την ολική ενέργεια στην ακρότατη θέση:

$$E_{ολ(x=0{,}1m)} = E_{ολ(x=A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{m\upsilon^2}{k}} \Leftrightarrow A = 0{,}2m$$

i) Το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς εμφανίζεται στις ακρότατες θέσεις της ταλάντωσης. Όταν:

$$x = \pm A \Leftrightarrow \Sigma F_{\max} = \pm kA,$$

συνεπώς το μέτρο είναι ίσο με: $\Sigma F_{\max} = kA \Leftrightarrow \Sigma F_{\max} = 40N$

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα δίνεται από τη σχέση:

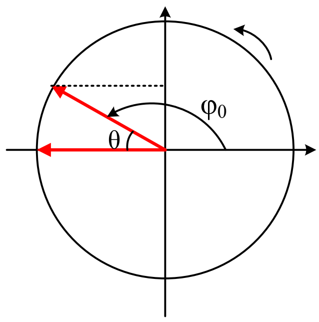
$$F_{ελ} = k\Delta l$$

όπου Δl η παραμόρφωση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Προφανώς:

$$F_{ελ(\max)} = k\Delta l_{\max} = k(\Delta l_0 + A) \Leftrightarrow F_{ελ(\max)} = 60N$$

στην κάτω ακρότατη θέση της ταλάντωσης.

ii) Ο υπολογισμός της αρχικής φάσης θα γίνει με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος. Επειδή για t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση χ=0,1m έχοντας αρνητική ταχύτητα (υ<0) αφού εκτοξεύεται προς τα κάτω, το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα των φάσεων γωνία:



$$ημθ = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2} = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

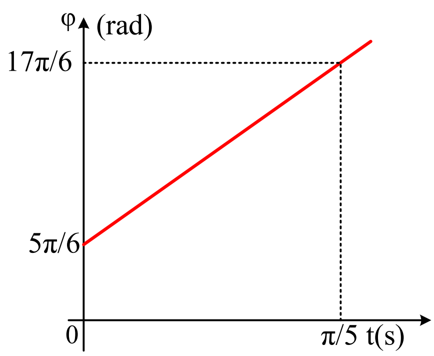
οπότε η αρχική φάση είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο αριστερόστροφα διάνυσμα με το θετικό ημιάξονα των φάσεων:

$$\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Η φάση της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \Leftrightarrow \varphi = 10t + \frac{5\pi}{6} (t \to s, \varphi \to rad)$$

και παριστάνεται από το διάγραμμα του σχήματος.



iii) Για το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων προτείνω τον εξής τρόπο:

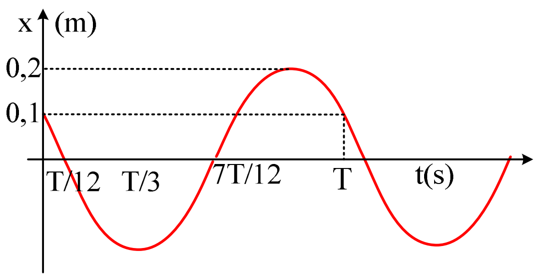
Όταν ο ταλαντωτής ξεκινώντας από την αρχική θέση χ=0,1m με υ<0 φθάνει στη Θ.Ι χ=0 με υ<0, το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει γωνία Δθ=π/6 σε χρόνο :

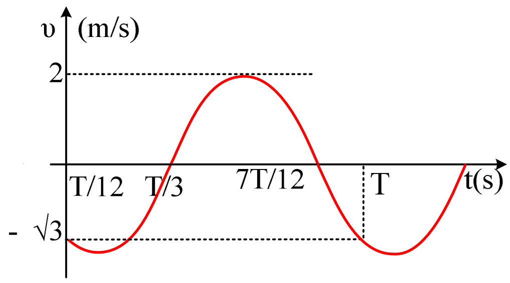
$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi/6}{2\pi/\mathrm{T}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{12}.$$

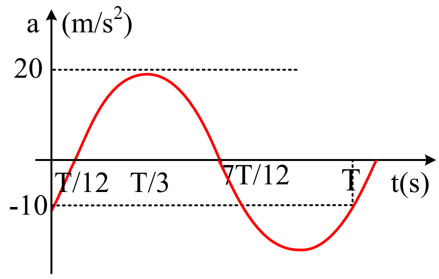
Δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{12}$, η φάση της ταλάντωσης είναι 5π/6+π/6=π και ο ταλαντωτής διέρχεται από τη θέση χ=0, με $\upsilon = -\upsilon_{max}$ και α=0. Ξέρουμε ότι ανά Τ/4 η φάση της ταλάντωσης αυξάνει κατά $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{T}}{4} = \frac{\pi}{2}$. Φτιάχνουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών, όπου μετά από τη στιγμή Τ/12 λαμβάνουμε αυξανόμενες τιμές χρόνου ανά Τ/4, οπότε η φάση μετά την τιμή π θα αυξάνει κατά π/2. Μετά τη χρονική στιγμή 5Τ/6, λαμβάνουμε τιμή χρόνου ίση με την περίοδο για να ολοκληρωθεί μία πλήρης μεταβολή τιμών :

t	ωt+5π/6	x=0,2ημ(10t+5π/6) (S.I)	υ=2συν(10t+5π/6) (S.I)	α=-20ημ(10t+5π/6) (S.I)
0	5π/6	0,1m	$-\sqrt{3}$ m/s	$-10\,m/s^2$
T/12	π	0	-2 m/s	0
T/3	3π/2	-0,2m	0	$20\,m/s^2$
7T/12	2π	0	2 m/s	0
5T/6	5π/2	0,2m	0	$-20\,m/s^2$
T	17π/6	0,1m	$-\sqrt{3}$ m/s	$-10\,m/s^2$

Με βάση τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις:



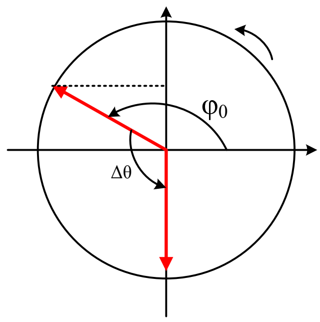




iv) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του από τη Θ.Ι είναι $x_1 = -0{,}1\sqrt{3}m/s$ υπολογίζεται από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης:

$$E_{ολ(x_1=-0{,}1\sqrt{3}m)} = E_{ολ(x=A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^{\,2} = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_1^{\,2})} \Leftrightarrow \upsilon_1 = 1\frac{m}{s}$$

v) Στο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί για 1η φορά μετά από τη στιγμή t=0, σε ακραία θέση της ταλάντωσής του, δηλαδή στη θέση χ=-0,2m, το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει γωνία: Δθ=π/6 +π/2=2π/3 σε χρόνο:



$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{\mathrm{T}}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{3} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{15}s$$

vi) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι ίση με:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \Leftrightarrow \Delta p = 0 - m(-\upsilon) \Leftrightarrow \Delta p = m\upsilon \Leftrightarrow \Delta p = 2\sqrt{3}\frac{Kg}{s}$$

Η θετική αλγεβρική τιμή δηλώνει ότι το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ έχει θετική φορά, δηλαδή προς τα πάνω.

Το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στον ταλαντωτή (δύναμη επαναφοράς) κατά την κίνηση μεταξύ δύο ορισμένων θέσεων της τροχιάς, υπολογίζεται με χρήση του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας.

Συνεπώς αρκεί να γνωρίζουμε την ταχύτητα του ταλαντωτή στην αρχική και τελική θέση της τροχιάς που ζητείται στην άσκηση:

$$W_{\Sigma F} = \Delta\mathrm{K} \Leftrightarrow W_{\Sigma F} = \mathrm{K}_{τελ} - \mathrm{K}_{αρχ} = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Leftrightarrow W_{\Sigma F} = -3J$$

Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε το έργο της δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί ο ταλαντωτής, παρά μόνο από την αρχική και την τελική θέση της τροχιάς. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου, υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} = \frac{1}{2}k\Delta l^2_{\;αρχ} - \frac{1}{2}k\Delta l^2_{\;τελ}$$

όπου $\Delta l_{αρχ,}\Delta l_{τελ}$ η παραμόρφωση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου στην αρχική και την τελική θέση της τροχιάς. Έτσι έχουμε:

$$W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} \Leftrightarrow W_{F_{ελ}} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta l_0 + A)^2 \Leftrightarrow W_{F_{ελ}} = -9J$$

vii) Η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, $K = 3U_T$, στις θέσεις:

$$K + U_T = E_{ολ} \Leftrightarrow 4U_T = E_{ολ} \Leftrightarrow U_T = \frac{1}{4}E_{ολ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_2^{\,2} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x_2^{\,2} = \frac{1}{4}A^2 \Leftrightarrow x_2 = \pm\frac{A}{2}$$

Επειδή ζητάμε την 1η φορά, μετά τη στιγμή t=0, από το διάγραμμα χ-t βλέπουμε ότι αυτό θα συμβεί στη θέση: $x_2 = -\frac{A}{2} \Leftrightarrow x_2 = -0{,}1m$

a) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη στον ταλαντωτή, δηλαδή με τη δύναμη επαναφοράς:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx_2 = -kx_2 \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = 20\frac{Kgm}{s^2}$$

b) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F\frac{dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -kx \cdot \upsilon$$

όπου $\Sigma F, \upsilon$ οι αλγεβρικές τιμές της δύναμης επαναφοράς $\Sigma\vec{F}$ και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. (Επειδή χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές οι οποίες καθορίζονται από τη φορά των διανυσμάτων, ο όρος συνθ όπου θ η γωνία μεταξύ της δύναμης επαναφοράς $\Sigma\vec{F}$ και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, παραλείπεται).

Άρα:

$$\frac{dK}{dt} = -kx_2 \cdot \upsilon_2 \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -kx_2 \cdot (-\omega\sqrt{A^2 - x_2^2}) \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -200(-0{,}1)(-\sqrt{3})\frac{J}{s} \Leftrightarrow$$
$$\frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η κινητική ενέργεια μειώνεται καθώς ο ταλαντωτής επιβραδύνεται αφού κινείται από τη Θ.Ι προς την αρνητική ακρότατη.

c) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_T + K = E_{O\Lambda} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \frac{dU_T}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_T}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon$$

όπου $\Sigma F, \upsilon$ οι αλγεβρικές τιμές της δύναμης επαναφοράς $\Sigma\vec{F}$ και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Άρα: $$\frac{dU_T}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU_T}{dt} = 20\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης αυξάνεται καθώς ο ταλαντωτής κινείται από τη Θ.Ι προς την αρνητική ακρότατη.

d) Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο του υπολογίζεται ως εξής:

$$W_B = U_{B(\alpha\rho\chi)} - U_{B(\tau\varepsilon\lambda)} = -\Delta U_B \Leftrightarrow dW_B = -dU_B \Leftrightarrow dU_B = -dW_B \Leftrightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dW_B}{dt} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{W \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = -W\frac{dx}{dt}\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \frac{dU_B}{dt} = -W\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν το βάρος $\vec{W}$ και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ενώ υ είναι το μέτρο της ταχύτητας.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας είναι ίσος με:

$$\frac{dU_B}{dt} = -W\upsilon_2 \sigma\upsilon\nu 0^o \Leftrightarrow \frac{dU_B}{dt} = -mg\upsilon_2 \Leftrightarrow \frac{dU_B}{dt} = -20\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια βαρύτητας μειώνεται καθώς το σώμα κατεβαίνει.

e) Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε το έργο της υπολογίζεται ως εξής:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow dW_{F_{\varepsilon\lambda}} = -dU_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow dU_{\varepsilon\lambda} = -dW_{F_{\varepsilon\lambda}} \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{F_{\varepsilon\lambda}\cdot dx\cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}\frac{dx}{dt}\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν η δύναμη του ελατηρίου $\overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}}$ και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ενώ υ, $F_{\varepsilon\lambda}$ είναι τα μέτρα της ταχύτητας και της δύναμης του ελατηρίου.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι ίσος με:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}\cdot\upsilon_2\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = k(\Delta l_0 + x_2)\cdot\upsilon_2 \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 40\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε και με χρήση της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας:

$$K + U_B + U_{\varepsilon\lambda} = E_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\left(\frac{dK}{dt} + \frac{dU_B}{dt}\right) \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 40\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η παραμόρφωσή του.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης