

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Παρατηρήσεις στη λύση των ασκήσεων Παραδείγματα – Εφαρμογές

Συντομογραφίες που θα χρησιμοποιούμε στο κείμενο για ευκολία:

Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση	ΓΑΤ
Απλή Αρμονική Ταλάντωση	ΑΑΤ
Θέση Ισορροπίας της ΓΑΤ	ΘΙ
Θετική ακραία θέση της ΓΑΤ	+Α
Αρνητική ακραία θέση της ΓΑΤ	-Α
Αρχή Διατήρησης ολικής Ενέργειας Ταλάντωσης (για σώμα που εκτελεί ΓΑΤ ή για κύκλωμα LC)	ΑΔΕΤ
Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας (για σύστημα που ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις)	ΑΔΜΕ
Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (για σώμα που κινείται)	ΘΜΚΕ
Αρχή Διατήρησης Ορμής (για μονωμένο σύστημα)	ΑΔΟ

Υποκατηγορίες	
Παραδείγματα	
Για λύση	

1. Ανακεφαλαίωση των μεγεθών και των εξισώσεων της ΓΑΤ

➔ 1-Α. Χαρακτηριστικά – ιδιότητες του συστήματος

Ιδιότητα του συστήματος	Φυσικό μέγεθος που την εκφράζει	
1. Αδράνεια του κινούμενου σώματος.	Μάζα:	m
2. «Ελαστικότητα» του συστήματος, η ικανότητά του δηλαδή να επανέρχεται στη ΘΙ.	Σταθερά επαναφοράς:	D
3. Ευκολία επανάληψης της κίνησης, το «πόσο γρήγορα» δηλαδή επαναλαμβάνεται η κίνηση.	Οποιοδήποτε από αυτά:	f = 1/T
	Περίοδος:	T
	Συχνότητα:	f
	Κυκλική συχνότητα:	ω
		ω = 2πf
4. Θέση ισορροπίας	Είναι η θέση στην οποία ισχύει: ΣF = 0	

Η βασική σχέση που συνδέει τις τρεις πρώτες ιδιότητες είναι η:

$$\mathbf{D = m \cdot \omega^2}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτουν και οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Αρκεί επομένως να γνωρίζουμε δύο από τις τρεις βασικές ιδιότητες του συστήματος, αφού από τη σχέση $D = m \cdot \omega^2$ μπορούμε να βρούμε και την τρίτη.

Τονίζεται, ότι οι τιμές των **m**, **D**, **ω** εξαρτώνται μόνο από τα χαρακτηριστικά του συστήματος που μελετάμε και δεν εξαρτώνται από την ενέργεια, το πλάτος ή οποιοδήποτε άλλο μέγιστο της ΓΑΤ που μπορεί να εκτελεί το σύστημα αυτό.

Παρατηρήσεις σχετικά με τη σταθερά επαναφοράς D του συστήματος:

- Η σταθερά **D** μπορεί να συμπίπτει με κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος (όπως π.χ. στις ταλαντώσεις με ελατήρια όπου $D = k$), ή μπορεί να είναι συνδυασμός κάποιων φυσικών μεγεθών (π.χ. στο εκκρεμές είναι $D = m \cdot g / L$, σε σώμα που επιπλέει σε υγρό είναι $D = d_{\text{υγρού}} \cdot g \cdot S$ κλπ.).
- Η σταθερά επαναφοράς προκύπτει και από τη διαδικασία που ακολουθούμε για να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί ΓΑΤ: Αποδεικνύοντας ότι η συνισταμένη δύναμη ΣF είναι ανάλογη με την απομάκρυνση **x**, ότι ισχύει δηλαδή η σχέση $\Sigma F = -D \cdot x$, υπολογίζουμε ταυτόχρονα και τη τιμή της σταθεράς **D**.
- Η σταθερά **D** είναι το μόνο φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με την πραγματική φύση του ταλαντούμενου συστήματος.

Όταν δίνεται σε μια άσκηση ότι «Σώμα μάζας **m**=... εκτελεί ΓΑΤ σταθεράς **D**=... κλπ.» τότε μπορούμε να βρούμε οτιδήποτε μας ζητηθεί για την ταλάντωση αυτή, αδιαφορώντας για ποιο σύστημα πρόκειται ή ποιες δυνάμεις ασκούνται.

Αν όμως ζητείται να *αποδείξουμε* ότι εκτελεί ΓΑΤ και να βρούμε και τη σταθερά **D**, τότε μελετάμε τις πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

➡ **1-B. Μέγιστες τιμές μεγεθών στη ΓΑΤ**

Είδος μέγιστου	Σχέση του με το πλάτος <i>A</i>
Μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος) A	—
Μέγιστη ταχύτητα v_{max}	v_{max} = ω · A
Μέγιστη επιτάχυνση a_{max}	a_{max} = ω² A
Μέγιστη δύναμη επαναφοράς F_{max}	F_{max} = m · ω² A
Μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max}	U_{max} = K_{max} = E όπου: E = 1/2 · D · A² = 1/2 · m · ω² A²
Μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max}	

Οι τιμές όλων των μέγιστων καθορίζονται από την ολική ενέργεια **E** που προσφέρθηκε στο σύστημα κατά τη διέγερσή του ώστε αυτό να εκτελέσει ΓΑΤ.

Η ολική ενέργεια **E** καθορίζει και το πλάτος **A** της ταλάντωσης (**E = 1/2 · D · A²**).

Δεδομένου ότι όλα τα μέγιστα συνδέονται με το πλάτος **A**, αρκεί να γνωρίζουμε ένα οποιοδήποτε μέγιστο, για να βρούμε και όλα τα υπόλοιπα.

Παρατήρηση:

Όταν σώμα εκτρέπεται κατά **d** από την ΘΙ και αφήνεται ελεύθερο να εκτελέσει ΓΑΤ, τότε **v_{αρχ} = 0**, δηλ. ξεκινάει από ακραία θέση. Άρα το πλάτος της ΓΑΤ είναι **A = d**. Η αρχική του απομάκρυνση είναι τότε **x_{αρχ} = + d** ή **x_{αρχ} = - d**, ανάλογα με την επιλογή της θετικής φοράς.

➡ **1-Γ. Στιγμιαίες τιμές μεγεθών στη ΓΑΤ**

Η θέση του σώματος (απομάκρυνση), η ταχύτητα, η επιτάχυνση, κλπ. σε μια ΓΑΤ μεταβάλλονται συνεχώς με το χρόνο. Είναι δηλαδή χρονικές συναρτήσεις και τις ονομάζουμε γενικά εξισώσεις της ΓΑΤ. Από αυτές καθορίζεται πλήρως η χρονική εξέλιξη της κίνησης:

Φυσικό μέγεθος	Χρονική συνάρτηση του μεγέθους
Απομάκρυνση: x	x = A · ημ(ω · t + φ₀)
Ταχύτητα: v	v = v_{max} · συν(ω · t + φ₀)
Επιτάχυνση: a	a = - a_{max} · ημ(ω · t + φ₀)
Δύναμη επαναφοράς (ΣF): F	F = - F_{max} · ημ(ω · t + φ₀)

Δυναμική ενέργεια:	U	$U = U_{\max} \cdot \eta \mu^2(\omega \cdot t + \phi_0)$
Κινητική ενέργεια:	K	$K = K_{\max} \cdot \sigma \upsilon \nu^2(\omega \cdot t + \phi_0)$

Είναι αξιοσημείωτο, ότι παρόλο που οι εξισώσεις της ΓΑΤ φαίνονται πολλές και πολύπλοκες αρκούν γι' αυτές πολύ λίγα δεδομένα:

- Δύο από τις τρεις ιδιότητες (**m**, **D**, **ω**) του συστήματος.
- Ένα οποιοδήποτε από τα μέγιστα (**E**, **A**, **$v_{\max}$** , ...).
- Πληροφορίες για την αρχική φάση ϕ_0 (δηλ. πώς άρχισε η ΓΑΤ, βλέπε πιο κάτω).

Παρατήρηση:

Όταν δίνονται συναρτήσεις με αριθμητικές τιμές όπως για παράδειγμα **$x=5\eta\mu(4\pi\cdot t)$** , **$v=2\sigma\upsilon\nu(10\cdot t+\pi/6)$** , **$F_{\text{ολ}}=-100\cdot x$** , **$U=0,25\eta\mu^2(\pi\cdot t)$** κλπ., τότε συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες από τη θεωρία και βρίσκουμε έτσι τιμές ιδιοτήτων του συστήματος ή μέγιστα (**ω** , **A**, **$v_{\max}$** , **D**, **E**, κλπ.). [😞 Τι βρίσκουμε από το κάθε παράδειγμα;]

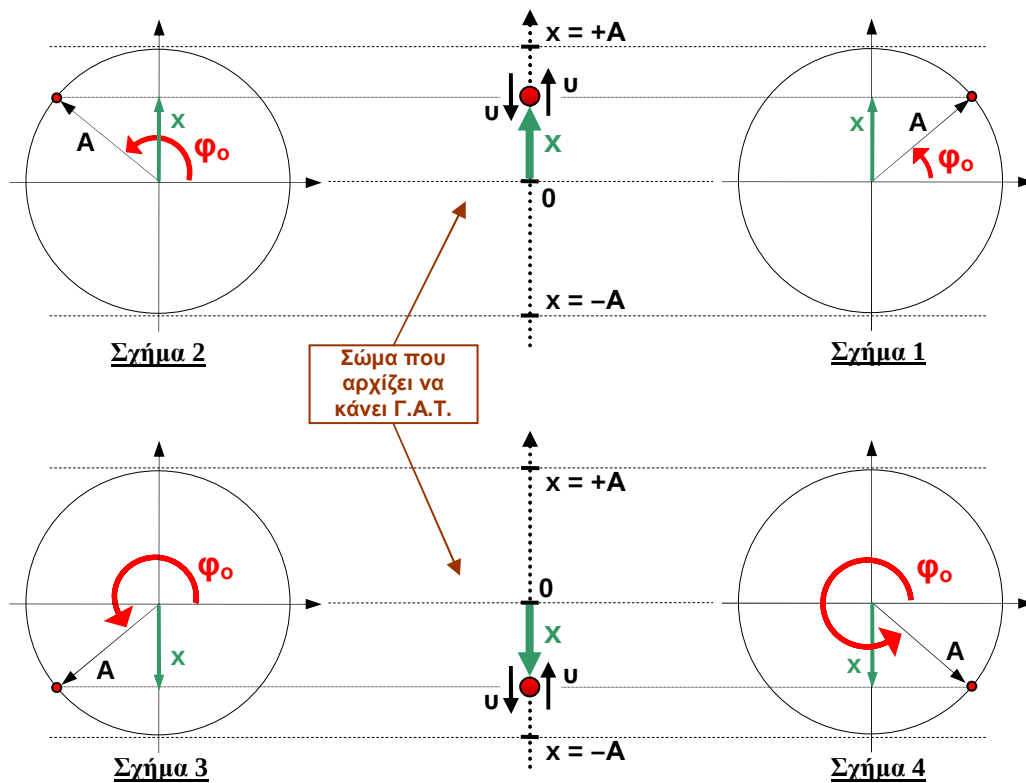


1-Δ.

Υπολογισμός της αρχικής φάσης ϕ_0

Θα πρέπει να γνωρίζουμε με ποιον τρόπο ξεκίνησε την χρονική στιγμή **$t=0$** η Γ.Α.Τ., δηλαδή από ποια θέση (απομάκρυνση **$x_{\text{αρχ}}$**) και προς ποια κατεύθυνση (ταχύτητα **$v_{\text{αρχ}}$**).

Από την εξίσωση **$x = A\eta\mu(\omega\cdot t + \phi_0)$** για **$t = 0$** έχουμε: **$\eta\mu(\phi_0) = x_{\text{αρχ}} / A$** . Από την τιμή του ημιτόνου βρίσκουμε δύο γωνίες **$\phi_{0,1}$** και **$\phi_{0,2}$** και στη συνέχεια επιλέγουμε την μία με τη βοήθεια της **$v_{\text{αρχ}}$** (βλέπε πιο κάτω, παρατήρηση ii).



Παρατηρήσεις σχετικά με την αρχική φάση φ_0

- i) Η αρχική φάση μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα από **0** έως **2π** , ώστε να καλύπτει όλους τους τρόπους έναρξης μιας Γ.Α.Τ.: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$

Γι' αυτό, όταν ζητάμε την φ_0 δεν χρησιμοποιούμε $2\kappa\pi$ στις λύσεις ημιτόνου – συνημιτόνου.

- ii) Τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η φ_0 :

$x_{\text{αρχ}} > 0$ (θετικό ημίτονο)	1° ή 2° τεταρτημόριο (επάνω)
$x_{\text{αρχ}} < 0$ (αρνητικό ημίτονο)	3° ή 4° τεταρτημόριο (κάτω)
$v_{\text{αρχ}} > 0$ (θετικό συνημίτονο)	1° ή 4° τεταρτημόριο (δεξιά)
$v_{\text{αρχ}} < 0$ (αρνητικό συνημίτονο)	2° ή 3° τεταρτημόριο (αριστερά)

- iii) Ειδικά για τις τιμές $\pi/2$, π και $3\pi/2$ έχουμε:

Τιμή της φ_0	Τρόπος εκίνησης της Γ.Α.Τ.		
$\varphi_0 = \pi/2$	$x_{\text{αρχ}} = +A$	$v_{\text{αρχ}} = 0$	Από θετική ακραία θέση
$\varphi_0 = \pi$	$x_{\text{αρχ}} = 0$	$v_{\text{αρχ}} = -v_{\text{max}}$	Από θέση ισορροπίας, με αρνητική κατεύθυνση
$\varphi_0 = 3\pi/2$	$x_{\text{αρχ}} = -A$	$v_{\text{αρχ}} = 0$	Από αρνητική ακραία θέση

- iv) Συνηθισμένες τιμές αρχικής φάσης:

$\eta\mu(\varphi_0) = x_{\text{αρχ}}/A$	0	$\frac{1}{2}$ (0,500)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,707)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (0,866)	1	$-\frac{1}{2}$ (-0,500)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (-0,707)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (-0,866)	-1
φ_0 $v > 0$ $v < 0$	0 π	$\pi/6$ $5\pi/6$	$\pi/4$ $3\pi/4$	$\pi/3$ $2\pi/3$	$\pi/2$ ($v=0$)	$11\pi/6$ $7\pi/6$	$7\pi/4$ $5\pi/4$	$5\pi/3$ $4\pi/3$	$3\pi/2$ ($v=0$)



1. Σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ. με εξίσωση $x = 0,2 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0)$ στο S.I. Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

α) $x = +0,1\text{m}$ με $v > 0$ ή με $v < 0$

β) $x = -0,1\text{m}$ με $v > 0$ ή με $v < 0$

Απάντηση στο (α):

Για $t = 0$ έχουμε $+0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu(\varphi_0) \rightarrow \eta\mu(\varphi_0) = +1/2$ και τελικά:

Αν $v > 0 \rightarrow \varphi_0 = \pi/6$ (Σχήμα 1)	Αν $v < 0 \rightarrow \varphi_0 = 5\pi/6$ (Σχήμα 2)
--	---

Απάντηση στο (β):

Για $t=0$ έχουμε $-0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu(\varphi_0) \rightarrow \eta\mu(\varphi_0) = -1/2$ και τελικά:

Αν $v > 0 \rightarrow \varphi_0 = 11\pi/6$ (Σχήμα 4)	Αν $v < 0 \rightarrow \varphi_0 = 7\pi/6$ (Σχήμα 3)
--	---



2. Σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ. με εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu(\pi \cdot t/3 + \phi_0)$ στο S.I. Η ταλάντωση ξεκίνησε τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με τέτοιο τρόπο ώστε σε χρόνο $\Delta t = 2s$ να περάσει από τη Θ.Ι. κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Να υπολογίσετε την αρχική φάση ϕ_0 .

Απάντηση:

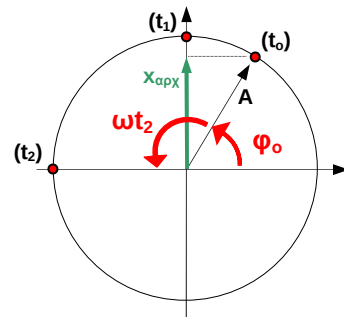
Από την εξίσωση της απομάκρυνσης βρίσκουμε την περίοδο T : $\omega \cdot t = \pi \cdot t/3 \rightarrow$

$2 \cdot \pi/T = \pi/3 \rightarrow T = 6s$. Επομένως $T/4 = 1,5s$ και $T/2 = 3s$. Συγκρίνουμε με τον χρόνο κίνησης που έχει δοθεί ($\Delta t = 2s$) και βλέπουμε ότι αυτός είναι μεταξύ των τιμών $T/4$ και $T/2$. Επομένως το σώμα έκανε την εξής διαδρομή (βλέπε και σχήμα):

Τη στιγμή: $t_0 = 0$	Τη στιγμή: $t_1 = \Delta t - T/4 = 0,5s$	Τη στιγμή: $t_2 = \Delta t = 2s$
$x_{αρχ} > 0$ $v_{αρχ} > 0$ Αρχίζει να κινείται προς τη θετική ακραία θέση	$x_1 = +A$ Φτάνει στην θετική ακραία θέση	$x_2 = 0$ $v_2 < 0$ Φτάνει στην Θ.Ι. με αρνητική φορά

Προφανώς: $\omega \cdot t_2 = \pi \cdot t_2/3 = 2\pi/3 \text{ rad}$

και: $\phi_0 = \pi - 2\pi/3 \rightarrow \boxed{\phi_0 = \pi/3} \text{ rad}$





1-E. Σχέσεις ανάμεσα στις στιγμιαίες τιμές των μεγεθών

Ας υποθέσουμε σε μια ταλάντωση ότι ζητάμε την ταχύτητα v του σώματος τη στιγμή που αυτό βρίσκεται σε απομάκρυνση x . Τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις του χρόνου, $v(t)$ και $x(t)$. Επομένως μπορούμε από την $x(t)$ να υπολογίσουμε τον χρόνο t και να αντικαταστήσουμε στην $v(t)$, που είναι όμως περίπλοκο λόγω τριγωνομετρίας.

Αν δεν μας χρειάζεται ο υπολογισμός του χρόνου μπορούμε να βρούμε απευθείας σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μεγεθών, π.χ. $v(x)$, $F(x)$, $a(v)$, κλπ.

Το πρώτο βήμα είναι η σχέση όλων των μεγεθών της ΓΑΤ με την απομάκρυνση x :

- Ταχύτητα v :

Ξεκινάμε από την ΑΔΕΤ: $K + U = E \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \rightarrow \text{☹️} \rightarrow$

$$v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

- Επιτάχυνση a :

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $\Sigma F = -D \cdot x$ και $\Sigma F = m \cdot a$

ή τις σχέσεις $a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t)$ και $x = A \cdot \eta\mu(\omega t)$ παίρνουμε: ☹️

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

- Δύναμη επαναφοράς $F_{ολ}$:

Υπάρχει ήδη η σχέση:

$$F_{ολ} = -D \cdot x$$

- Δυναμική ενέργεια U :

Υπάρχει ήδη η σχέση:

$$U = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

- Κινητική ενέργεια K :

Πάλι από την ΑΔΕΤ: $K + U = E \rightarrow K = E - U \rightarrow$

$$K = E - \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις, με απαλοιφή της απομάκρυνσης x μπορούμε να βρούμε σχέση ανάμεσα σε οποιαδήποτε μεγέθη. [☹️ Δοκιμάστε να βρείτε τις $U(v)$ και $U(a)$.]

Παρατηρήσεις σχετικά με τις σχέσεις στιγμιαίων τιμών:

- Προσέξτε ότι η ΑΔΕΤ είναι σημαντική σχέση σε τέτοια προβλήματα (και όχι μόνο).
- Με τη βοήθεια της ΑΔΕΤ αλλά και γενικότερα όλων των πιο πάνω σχέσεων μπορούμε εύκολα να απαντήσουμε σε ερωτήματα του είδους: «Σε ποια θέση είναι η K ίση με τη U ;» κλπ.

Για παράδειγμα, από την ΑΔΕΤ προκύπτει ☹️ ότι συμμετρικές θέσεις ($x_1 = -x_2$), αντιστοιχούν σε ίσες ή αντίθετες ταχύτητες ($v_1 = \pm v_2$), ίσες δυναμικές και ίσες κινητικές ενέργειες ($U_1 = U_2$ και $K_1 = K_2$).

- Αν γνωρίζουμε στην ίδια θέση (δηλ. την ίδια στιγμή) τις τιμές δύο τέτοιων μεγεθών, μπορούμε να βρούμε ένα μέγιστο της ΓΑΤ, ή μία ιδιότητα του συστήματος.

Για παράδειγμα:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \rightarrow \underline{A = \dots}$$

$$a = -\omega^2 \cdot x \rightarrow \underline{\omega = \dots}$$

$$F = -D \cdot x \rightarrow \underline{D = \dots}$$

κλπ.



Να δείξετε ότι η επιτάχυνση a και η ταχύτητα v σε μια ΓΑΤ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση: $a^2 = \omega^2(v_{\max}^2 - v^2)$

Απάντηση:

Ισχύει: $a = -\omega^2 \cdot x \rightarrow \boxed{a^2 = \omega^4 \cdot x^2} \quad (I)$

Επίσης: $K + U = E \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 \rightarrow$

$$\boxed{x^2 = (v_{\max}^2 - v^2) / \omega^2} \quad (II)$$

Η σχέση (I) με τη χρήση της (II) γίνεται: $\boxed{a^2 = \omega^2(v_{\max}^2 - v^2)}$



Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και ισορροπεί. Το εκτρέπουμε προς τα πάνω κατά $d=0,2\text{m}$ και τη στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΓΑΤ. Ζητούνται:

α) Η κυκλική συχνότητα ω .

β) Το πλάτος A και η αρχική φάση ϕ_0 της ΓΑΤ (με θετική φορά προς τα πάνω).

γ) Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης x , της ορμής p του σώματος, της δυναμικής ενέργειας U και της ολικής ενέργειας E σε σχέση με το χρόνο.

δ) Πού βρίσκεται το σώμα τη στιγμή που ασκείται πάνω του δύναμη $F_{\text{ολ}}=+12\text{N}$ και ποια είναι η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή;

$$[\ 10\text{r/s} \quad 0,2\text{m} \quad \pi/2 \quad x=0,2\eta\mu(10t+\pi/2)\text{m} \quad p=2\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/2)\text{kgm/s} \]$$

$$[\ U=2\eta\mu^2(10t+\pi/2)\text{J} \quad E=2\text{J} \quad x=0,12\text{m} \quad v=\pm 1,6\text{m/s} \]$$

2.

Προβλήματα που σχετίζονται με χρονικές στιγμές (t),
χρονική διάρκεια ($\Delta t = t_2 - t_1$),
φάση ($\Phi = \omega \cdot t$ ή $\Phi = \omega \cdot t + \phi_0$) και μεταβολή φάσης ($\Delta \Phi = \omega \cdot \Delta t$)



2-A.

Όταν έχουμε μια μόνο ΓΑΤ

Ο γενικός κανόνας είναι ότι δουλεύουμε με τις χρονικές – ημιτονοειδείς συναρτήσεις των διαφόρων μεγεθών (απομάκρυνσης, ταχύτητας, κλπ.), και υπολογίζουμε την τιμή της φάσης Φ που αντιστοιχεί στα δεδομένα μας.

Δηλαδή υπολογίζουμε την γωνία $\omega \cdot t + \phi_0$ ή μόνο την $\omega \cdot t$ αν δεν έχουμε αρχική φάση, με τη βοήθεια των γενικών λύσεων (με $2\kappa\pi$) των εξισώσεων ημιτόνου και συνημιτόνου, π.χ.:

$$\eta\mu(\omega \cdot t + \phi_0) = 0,5 \rightarrow \omega \cdot t + \phi_0 = 2\kappa\pi + \pi/6 \text{ ή } \omega \cdot t + \phi_0 = 2\kappa\pi + (\pi - \pi/6)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \phi_0) = 0,5 \rightarrow \omega \cdot t + \phi_0 = 2\kappa\pi + \pi/3 \text{ ή } \omega \cdot t + \phi_0 = 2\kappa\pi - \pi/3$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας και τον βοηθητικό κύκλο, βρίσκουμε ποιες τιμές του ακεραίου κ ικανοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος. Εδώ θα παίξουν ρόλο πληροφορίες του τύπου «περνάει για δεύτερη, τρίτη, κλπ. φορά», «περνάει από την ίδια θέση αλλά με αντίθετη κατεύθυνση» και άλλες παρόμοιες.

Τέλος, λύνουμε, αν χρειάζεται, ως προς το χρόνο t .

Παρατηρήσεις στα προβλήματα χρόνου και φάσης

- i) Σε χρόνο μιας περιόδου T το σώμα περνάει:
- Δύο φορές από τη ΘΙ, με αντίθετες ταχύτητες.
 - Μία φορά από κάθε μία από τις ακραίες θέσεις $+A$ και $-A$.
 - Η δυναμική ενέργεια U και η κινητική ενέργεια K γίνονται μέγιστες δύο φορές, μηδενίζονται δύο φορές (όχι ταυτόχρονα βέβαια) και γίνονται ίσες τέσσερις φορές, στις θέσεις $x = \pm 0,707A$).



Να αναζητήσετε τα πιο πάνω στα διαγράμματα $x(t)$, $v(t)$, $U(t)$, $K(t)$ και στον βοηθητικό κύκλο.

- ii) Όταν μας ζητούν το χρόνο Δt (χρονική διάρκεια) για να μεταβεί το σώμα από μία θέση x_1 σε άλλη θέση x_2 , εργαζόμαστε ως εξής:

Υπολογίζουμε πρώτα την φάση που αντιστοιχεί σε κάθε θέση:

$$x_1 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \rightarrow \omega \cdot t_1 + \phi_0 = \dots \text{ και}$$

$$x_2 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \rightarrow \omega \cdot t_2 + \phi_0 = \dots$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές t_1 , t_2 και αφαιρούμε: $\Delta t = t_2 - t_1$.

- iii) Επειδή η μεταβολή της φάσης $\Delta \Phi$ στη ΓΑΤ είναι ανάλογη με το χρόνο Δt , μπορούμε στο προηγούμενο ζήτημα, αφού πρώτα βρούμε τις δύο φάσεις, να βρούμε στη συνέχεια τη μεταβολή φάσης $\Delta \Phi$ και τελικά τον ζητούμενο χρόνο:

$$\Delta\Phi = (\omega \cdot t_2 + \phi_0) - (\omega \cdot t_1 + \phi_0) = \omega \cdot (t_2 - t_1) \rightarrow \Delta\Phi = \omega \cdot \Delta t \text{ και τελικά: } \Delta t = \Delta\Phi / \omega$$



Να δείξετε ότι για να μεταβεί ένα σώμα που εκτελεί ΓΑΤ από τη θέση $+0,866 \cdot A$ με $v > 0$ μέχρι τη θέση $-0,707 \cdot A$ με $v < 0$ χρειάζεται χρόνος $11 \cdot T / 24$.

- iv) Το διάστημα S (μήκος τροχιάς) που διανύει το σώμα σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις, καθώς και ο αντίστοιχος χρόνος Δt , είναι:

Από – Έως	Μήκος τροχιάς, S	Χρόνος, Δt
$\Theta I \leftrightarrow \pm A$	A	$T/4$
$\Theta I \rightarrow \Theta I$ με <u>αντίθετη</u> φορά	$2 \cdot A$	$T/2$
$\Theta I \rightarrow \Theta I$ με <u>ίδια</u> φορά	$4 \cdot A$	T
$+A \leftrightarrow -A$	$2 \cdot A$	$T/2$
$+A \rightarrow +A$ ή $-A \rightarrow -A$	$4 \cdot A$	T
$x \rightarrow x$ με <u>ίδια</u> φορά	$4 \cdot A$	T
$x \rightarrow -x$ με <u>αντίθετη</u> φορά (θέσεις συμμετρικές ως προς ΘI)	$2 \cdot A$	$T/2$
Να επαληθεύσετε τα πιο πάνω στο βοηθητικό κύκλο.		

- v) Δύο διαδρομές S_1 και S_2 που είναι συμμετρικές ως προς τη ΘI αντιστοιχούν σε ίσες μεταβολές της φάσης $\Delta\Phi$ (ίσα τόξα στον βοηθητικό κύκλο) και καλύπτονται στον ίδιο χρόνο Δt είτε προς την μία είτε προς την άλλη κατεύθυνση ($\Delta\Phi = \omega \cdot \Delta t$).



Σώμα που εκτελεί ΓΑΤ χρειάζεται $2s$ για να μεταβεί από ένα σημείο Σ απευθείας στο συμμετρικό Σ' ως προς τη ΘI . Στη συνέχεια χρειάζεται άλλα $4s$ για να περάσει πάλι από το Σ' με αντίθετη φορά. α) Να υπολογίσετε την περίοδο T της ΓΑΤ. β) Αν τα Σ, Σ' απέχουν 10cm , να υπολογίσετε το πλάτος A της ΓΑΤ. (Εξυπηρετεί να χρησιμοποιήσετε τον βοηθητικό κύκλο.) [$12s$ 10cm]



1. Ένα εκκρεμές κάνει N πλήρεις αιωρήσεις σε χρόνο $\Delta t = 100s$. Να βρείτε την περίοδο T της ταλάντωσης, αν μέσα στο χρόνο αυτό έχει περάσει:

α) 50 φορές από την ΘI .

β) 50 φορές από την ακραία θέση $+A$.

γ) 50 φορές από ακραία θέση (είτε $+A$ είτε $-A$).

Απάντηση:

(α) $\rightarrow$ Έχει κάνει $N=25$ πλήρεις αιωρήσεις και $T = \Delta t / N = \underline{4s}$.

(β) $\rightarrow$ Έχει κάνει $N=50$ πλήρεις αιωρήσεις και $T = \Delta t / N = \underline{2s}$.

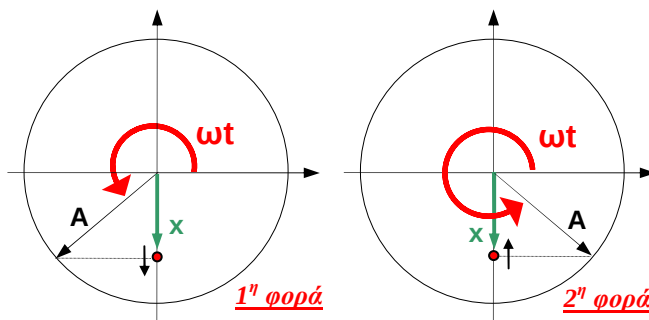
(γ) $\rightarrow$ Έχει κάνει $N=25$ πλήρεις αιωρήσεις και $T = \Delta t / N = \underline{4s}$.



2. Σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ. με εξίσωση $x = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t) \text{ cm}$ και με περίοδο $T = 6s$.

- α)** Να βρείτε σε πόσο χρόνο Δt μετά από τη στιγμή $t_0 = 0$ που ξεκίνησε θα περάσει από τη θέση $x = -10 \text{ cm}$ για $7^{\text{η}}$ φορά.
- β)** Να βρείτε επίσης πόσες φορές πέρασε από τη θέση αυτή, κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας.

Απάντηση στο (α):



Βρίσκουμε πρώτα από τις γενικές λύσεις του ημιτόνου τις τιμές της φάσης ωt που αντιστοιχούν στη θέση $x = -10 \text{ cm}$:

$$-10 = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t) \rightarrow$$

$$\eta\mu(\omega \cdot t) = -0,5 \rightarrow$$

$$\boxed{\omega \cdot t = 2\kappa\pi - \pi/6} \quad (I)$$

ή

$$\boxed{\omega \cdot t = 2\kappa\pi + 7\pi/6} \quad (II)$$

Οι τιμές της φάσης που προκύπτουν από την (I) ανήκουν στο 4° τεταρτημόριο, ενώ αυτές που προκύπτουν από την (II) ανήκουν στο 3° τεταρτημόριο.

Οι λύσεις της (I) αντιστοιχούν σε $v > 0$, ενώ της (II) σε $v < 0$.

Αναλυτικά, έχουμε:

Τιμή του κ	(I) $\omega \cdot t = 2\kappa\pi - \pi/6$, (4° τεταρτημ. **)	(II) $\omega \cdot t = 2\kappa\pi + 7\pi/6$, (3° τεταρτημ.)
κ αρνητικός	απορρίπτεται *	απορρίπτεται *
$\kappa = 0$	απορρίπτεται *	$\omega \cdot t = 7\pi/6$ ($1^{\text{η}}$ φορά, $v < 0$)
$\kappa = 1$	$\omega \cdot t = 11\pi/6$ ($2^{\text{η}}$ φορά, $v > 0$)	$\omega \cdot t = 2\pi + 7\pi/6$ ($3^{\text{η}}$ φορά, $v < 0$)
$\kappa = 2$	$\omega \cdot t = 2\pi + 11\pi/6$ ($4^{\text{η}}$ φορά, $v > 0$)	$\omega \cdot t = 4\pi + 7\pi/6$ ($5^{\text{η}}$ φορά, $v < 0$)
$\kappa = 3$	$\omega \cdot t = 4\pi + 11\pi/6$ ($6^{\text{η}}$ φορά, $v > 0$)	$\omega \cdot t = 6\pi + 7\pi/6$ ($7^{\text{η}}$ φορά, $v < 0$)
κλπ.		
* Η φάση ΔΕΝ παίρνει αρνητικές τιμές		
** Η (I) μπορεί να γραφτεί και: $\omega \cdot t = 2\kappa\pi + 11\pi/6$, οπότε οι λύσεις θα ξεκινούσαν από $\kappa=0$ και για τις δύο:		
Τιμή του κ	(I) $\omega \cdot t = 2\kappa\pi + 11\pi/6$, (4° τεταρτημ.)	(II) $\omega \cdot t = 2\kappa\pi + 7\pi/6$, (3° τεταρτημ.)
κ αρνητικός	απορρίπτεται	απορρίπτεται
$\kappa = 0$	$\omega \cdot t = 11\pi/6$ ($2^{\text{η}}$ φορά)	$\omega \cdot t = 7\pi/6$ ($1^{\text{η}}$ φορά)
$\kappa = 1$	$\omega \cdot t = 2\pi + 11\pi/6$ ($4^{\text{η}}$ φορά)	$\omega \cdot t = 2\pi + 7\pi/6$ ($3^{\text{η}}$ φορά)
$\kappa = 2$	$\omega \cdot t = 4\pi + 11\pi/6$ ($6^{\text{η}}$ φορά)	$\omega \cdot t = 4\pi + 7\pi/6$ ($5^{\text{η}}$ φορά)
$\kappa = 3$		$\omega \cdot t = 6\pi + 7\pi/6$ ($7^{\text{η}}$ φορά)

Έτσι, η ζητούμενη τιμή είναι η $\omega \cdot t = 6\pi + 7\pi/6$ ($7^{\text{η}}$ φορά):

$$\omega \cdot t = 6\pi + 7\pi/6 \rightarrow \omega \cdot t = 43\pi/6 \rightarrow (2\pi/T) \cdot t = 43\pi/6 \rightarrow t = 43 \cdot T/12$$

και με αντικατάσταση: $t = 21,5s$. Δηλαδή ο χρόνος που πέρασε από την έναρξη της κίνησης είναι: $\Delta t = t - t_0 = 21,5s - 0 \rightarrow \Delta t = 21,5s$

Απάντηση στο (β):

Είναι εμφανές ότι όταν περνάει από τη θέση $x = -10cm$ με κατεύθυνση προς τη Θ.Ι., τότε η ταχύτητά του είναι θετική. Τούτο συμβαίνει την 2^η, 4^η και 6^η φορά (στο 3^ο τεταρτημόριο), δηλαδή συνολικά τρεις φορές.



3. Σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ. με εξίσωση $x = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + 5\pi/6)$ cm και φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x = +20cm$ σε χρόνο $\Delta t = 5s$.

α) Να υπολογίσετε την περίοδο T της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα S (μήκος τροχιάς) που έχει διανύσει το σώμα στο χρόνο αυτό.

Απάντηση στο (α):

Την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ η Γ.Α.Τ. ξεκινάει από την θέση:

$$x_1 = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_1 + 5\pi/6) \text{ cm} \rightarrow x_1 = 20 \cdot \eta\mu(5\pi/6) \text{ cm} \rightarrow$$

$$x_1 = +10cm \text{ με αρνητική κατεύθυνση (δηλ. προς την Θ.Ι.).}$$

Την χρονική στιγμή t_2 το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x = x_2 = +20cm$ (θετική ακραία θέση) οπότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η φάση του έχει γίνει $2\pi + \pi/2$.

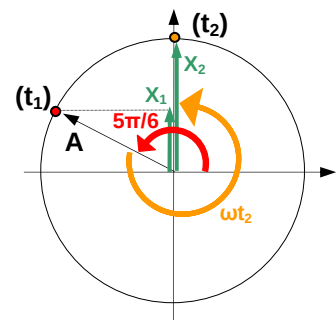
Δηλαδή:

$$\omega \cdot t_2 + 5\pi/6 = 2\pi + \pi/2 \rightarrow \omega \cdot t_2 = 5\pi/3 \rightarrow (2\pi/T) \cdot t_2 = 5\pi/3$$

$$\text{και τελικά: } t_2 = 5T/6$$

$$\text{Άρα το χρονικό διάστημα } \Delta t \text{ είναι: } \Delta t = t_2 - t_1 = 5T/6 - 0 \rightarrow \Delta t = 5T/6$$

$$\text{και η ζητούμενη περίοδος: } T = 6 \cdot \Delta t / 5 \text{ ή } T = 6s$$



Σχόλιο: Τη φάση στην θέση x_2 μπορούμε και τυπικά να τη βρούμε από την εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$x_2 = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_2 + 5\pi/6) \text{ cm} \rightarrow +20 = 20 \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_2 + 5\pi/6) \rightarrow \eta\mu(\omega \cdot t_2 + 5\pi/6) = 1 \text{ άρα:}$$

$$\omega \cdot t_2 + 5\pi/6 = 2\kappa\pi + \pi/2 \text{ και για } \kappa=1 \text{ έχουμε: } \omega \cdot t_2 + 5\pi/6 = 2\pi + \pi/2$$

Απάντηση στο (β):

Το σώμα έχει κάνει στο χρόνο Δt την εξής διαδρομή:

$$\text{Από } x_1 = +10cm \rightarrow x = 0 \rightarrow x = -20cm \rightarrow x = 0 \rightarrow x_2 = +20cm.$$

$$\text{Επομένως το συνολικό διάστημα είναι: } S = (10+20+20+20)cm \rightarrow S = 70cm$$



Σώμα κάνει ΓΑΤ με περίοδο $T=12s$ και πλάτος A . Να υπολογίσετε πόσο χρόνο χρειάζεται για να διανύσει διάστημα S ίσο με το πλάτος A της ταλάντωσης.

[Χρειάζεται το λιγότερο $2s$ και το πολύ $4s$]

➡ 2-B. Όταν έχουμε δύο ΓΑΤ (προβλήματα συνάντησης κλπ.)

Αν δύο σώματα εκτελούν ταυτόχρονες ΓΑΤ πάνω στον **ίδιο άξονα** και γύρω από την **ίδια ΘΙ** τότε, αναπόφευκτα, κάποια στιγμή t_x συναντιούνται, δηλαδή για $t = t_x$ φτάνουν στην **ίδια θέση** – εξισώνονται οι απομακρύνσεις τους: $x_1(t_x) = x_2(t_x)$. Ανάλογα με τα δεδομένα, αυτό μπορεί να σημαίνει ότι συγκρούονται, ή μπορεί απλώς να περνούν ταυτόχρονα από τη θέση αυτή (αν οι άξονες κίνησης δεν ταυτίζονται ακριβώς αλλά είναι παράλληλοι).

Στην τελευταία περίπτωση ακολουθούν και άλλες συναντήσεις, που μπορεί και να επαναλαμβάνονται περιοδικά.

Γενικά η λύση τέτοιων προβλημάτων είναι αρκετά περίπλοκη λόγω τριγωνομετρικών σχέσεων (και δεν συνηθίζονται στις εξετάσεις!).

Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν **ίδια συχνότητα** τότε η λύση είναι απλούστερη (και ακόμα πιο απλή αν έχουν και το ίδιο πλάτος).

Ο **βοηθητικός κύκλος** είναι **ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΟΣ** σε τέτοια προβλήματα.

Θα δούμε μόνο μερικά παραδείγματα.



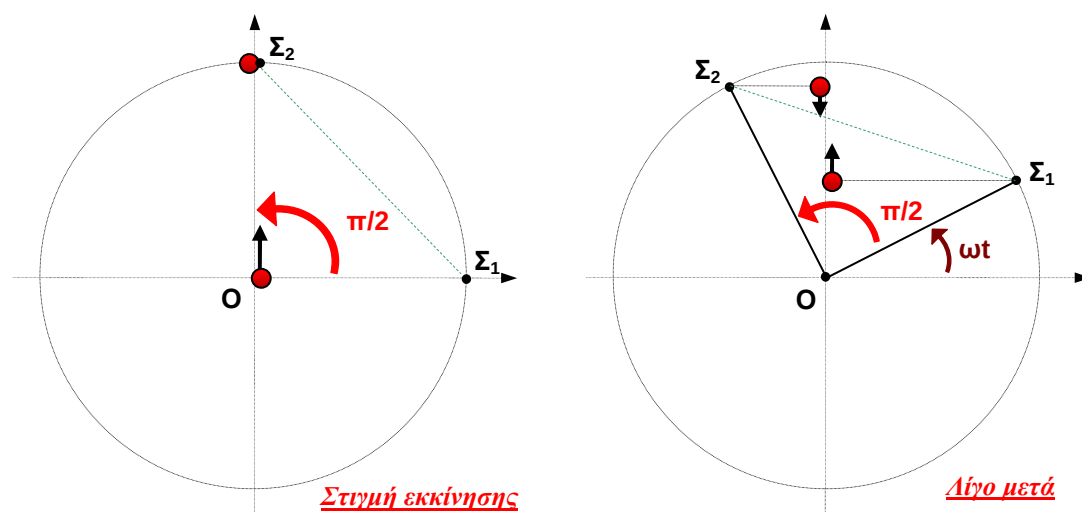
1. Δύο σώματα εκτελούν ΓΑΤ πάνω στην ίδια ευθεία, γύρω από την ίδια ΘΙ, με εξισώσεις $x_1 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t)$ και $x_2 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)$, όπου $A=20\text{cm}$ και $T=8\text{s}$.

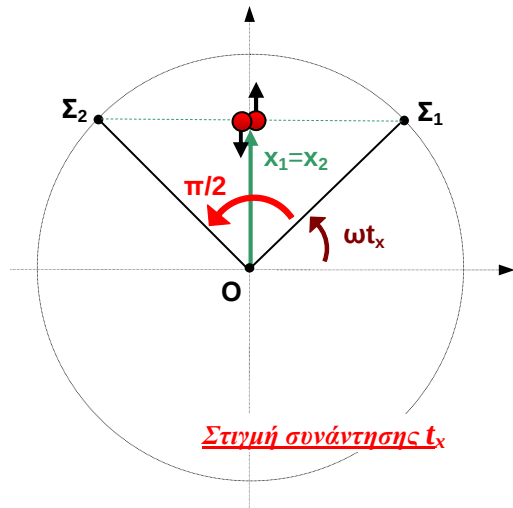
Να βρείτε ποια στιγμή t_x και σε ποια θέση x και **πώς** συναντιούνται για πρώτη φορά.

Απάντηση:

Οι δύο ΓΑΤ έχουν ίδια ΘΙ, ίδιο πλάτος και γίνονται πάνω στην ίδια ευθεία. Προφανώς έχουν τον ίδιο βοηθητικό κύκλο. Η 2^η προηγείται σε φάση κατά $\pi/2$ από την 1^η, άρα ξεκινούν από διαφορετικές θέσεις.

Συγκεκριμένα, η 1^η ξεκινά από τη ΘΙ με θετική φορά, ενώ η 2^η από την θέση $+A$:





Παρατηρήστε στα δύο πρώτα σχήματα το τρίγωνο που σχηματίζεται από το κέντρο O και τα βοηθητικά σημεία Σ_1, Σ_2 . Το τρίγωνο $O\Sigma_1\Sigma_2$ είναι ισοσκελές, ορθογώνιο (η διαφορά φάσης των δύο ΓΑΤ είναι $\pi/2$) και στρέφεται γύρω από την κορυφή O . Η συνάντηση συμβαίνει όταν η υποτείνουσα $\Sigma_1\Sigma_2$ φτάσει σε οριζόντια θέση (τρίτο σχήμα).

1) Αλγεβρική λύση:

Τη στιγμή $t = t_x$ τα δύο σώματα συναντιούνται, δηλαδή οι απομακρύνσεις τους γίνονται ίσες:

$$x_1 = x_2 \rightarrow A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_x) = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_x + \pi/2) \rightarrow$$

$$i) \omega \cdot t_x = \omega \cdot t_x + \pi/2 \text{ (ίσες)} \rightarrow \text{απορρίπτεται.}$$

$$ii) \omega \cdot t_x = \pi - (\omega \cdot t_x + \pi/2) \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$\rightarrow \text{δεκτή} \rightarrow \omega \cdot t_x = \pi/4 \text{ και τελικά: } t_x = T/8 = 1s$$

$$\text{Η απομάκρυνση τότε είναι: } x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t_x) = 20 \cdot \eta\mu(\pi/4) \text{ cm} \rightarrow x = 14,1 \text{ cm}$$

Τέλος, κατά τη συνάντηση, τα δύο κινητά έχουν αντίθετες ταχύτητες (γιατί;)

2) Γεωμετρική λύση:

Τη στιγμή που συναντιούνται (τρίτο σχήμα), το τρίγωνο $O\Sigma_1\Sigma_2$ βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε ο ψ άξονας να διχοτομεί την ορθή γωνία $\Sigma_1O\Sigma_2$. Οπότε προφανώς είναι: $\omega \cdot t_x = \pi/4$ κλπ.



Παρατηρώντας τα τρία προηγούμενα σχήματα και κυρίως την περιστροφή του τριγώνου $O\Sigma_1\Sigma_2$ σε σχέση με τις ταλαντώσεις των δύο σωμάτων, να προσπαθήσετε να απαντήσετε στα εξής:

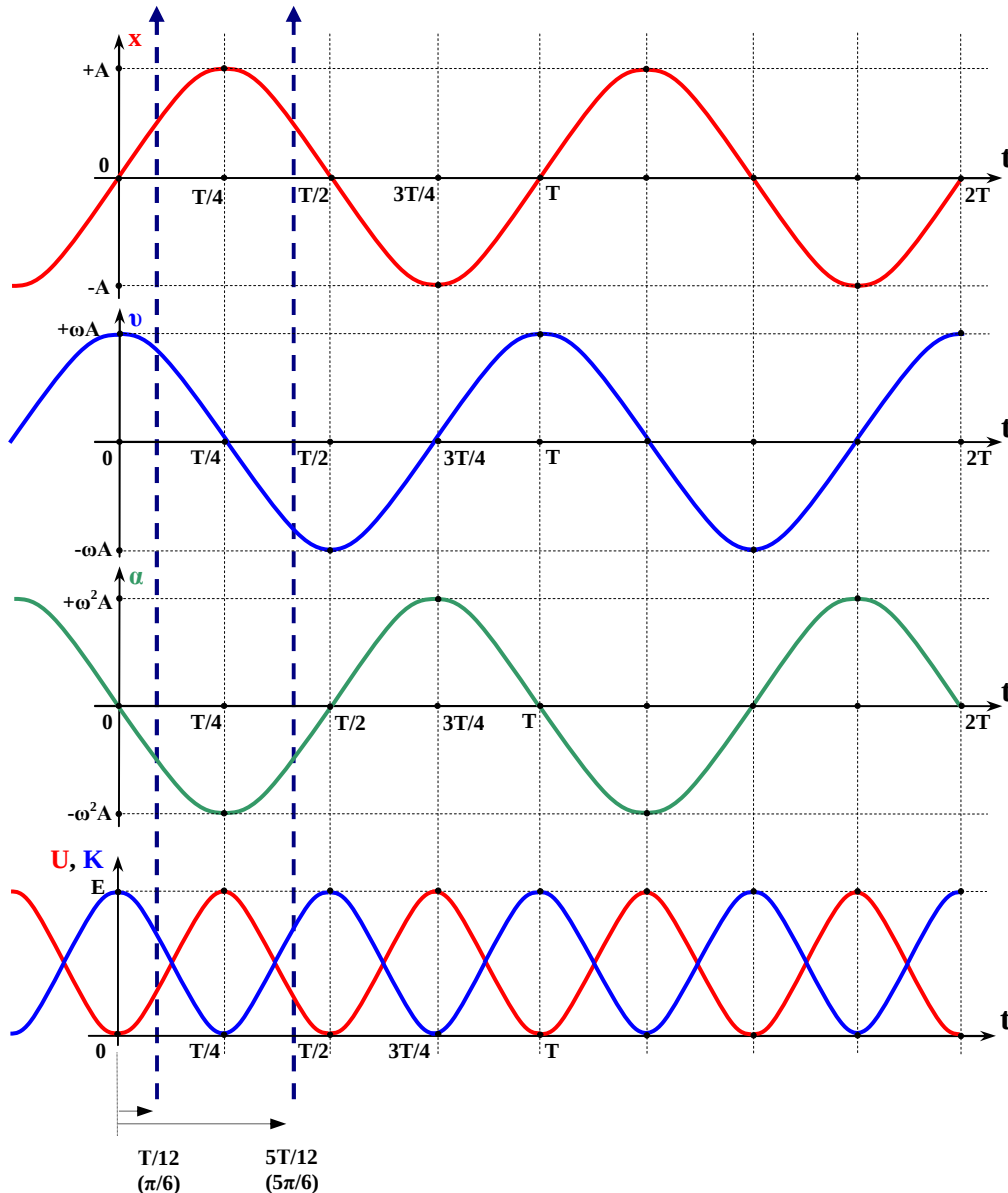
- Σε πόσο χρόνο μετά την πρώτη τους συνάντηση συναντιούνται για 2^η φορά;
- Καθώς τα δύο σώματα ταλαντώνονται, άλλοτε πλησιάζουν και άλλοτε απομακρύνονται. Πόση είναι η πιο μεγάλη μεταξύ τους απόσταση;

$$[\text{ Σε } 4s \text{ μετά την πρώτη συνάντηση} \quad 20\sqrt{2} \text{ cm}]$$

3.

Γραφικές παραστάσεις των μεγεθών της ΓΑΤ
και πληροφορίες που παίρνουμε από αυτές.

➔ 3-A.

Σε συνάρτηση με το χρόνο t 

Πέρα από τη μαθηματική μορφή (ημίτονο, συνημίτονο, κλπ), θα πρέπει να γνωρίζουμε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή (A , $v_{\max}$, ...) του μεγέθους και την αρχική φάση φ_0 .

Στην περίπτωση που έχουμε αρχική φάση μετατοπίζουμε τον ψ άξονα δεξιά κατά το χρόνο Δt που αντιστοιχεί στη φ_0 ($\Delta t = \varphi_0 / \omega$) σε όλες τις γραφικές παραστάσεις (βλέπε σχήμα). Έτσι αλλάζει η βαθμολογία του άξονα των χρόνων (μειώνονται δηλαδή οι τιμές κατά Δt), ώστε η τιμή $t=0$ να αντιστοιχεί στη νέα θέση του ψ άξονα.

Στο πιο πάνω σχήμα σημειώνεται για παράδειγμα η νέα θέση του ψ άξονα για αρχική φάση $\pi/6$ ή $5\pi/6$.

Παρατηρήσεις:

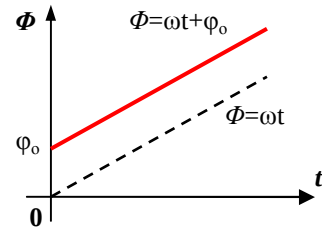
- i) Προσέξτε ότι η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δεν αλλάζει, αφού η μετατόπιση του άξονα είναι ίδια για όλες.
- ii) Αντίστροφα, αν μας δίνεται μια ημιτονοειδής απεικόνιση μπορούμε από αυτήν να βρούμε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή του μεγέθους (π.χ. A , $v_{\max}$, ...) και την αρχική φάση ϕ_0 της ΓΑΤ.
- iii) Οι γραφικές παραστάσεις της δυναμικής U και της κινητικής ενέργειας K έχουν μόνο θετικές τιμές (ή μηδέν) και μεταβάλλονται έτσι ώστε σε μια περίοδο T της ΓΑΤ να κάνουν δύο πλήρεις επαναλήψεις. Τυπικά, έχουν δηλαδή περίοδο $T/2$.

Πράγματι:

$$U = E \cdot \eta \mu^2(\omega \cdot t) \rightarrow U = E \cdot \frac{1 - \cos(2\omega \cdot t)}{2} \rightarrow U = \frac{E}{2} - \frac{E}{2} \cdot \cos(2\omega \cdot t)$$

(Κυκλική συχνότητα είναι 2ω .)

- iv) Όλες οι χρονικές συναρτήσεις σε μια ΓΑΤ είναι ημιτονοειδείς, εκτός από τη φάση $\Phi = \omega \cdot t + \phi_0$ που μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο (βλέπε διπλανό σχήμα). Στην περίπτωση αυτή, χαρακτηριστικά στοιχεία είναι η τιμή ϕ_0 από την οποία ξεκινά η γραφική παράσταση και η κλίση της ω .
- v) Αν σε κοινούς άξονες δίνονται δύο απεικονίσεις ίδιων μεγεθών, για παράδειγμα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ για δύο διαφορετικές ΓΑΤ τότε, ακόμη και αν οι άξονες δεν έχουν τιμές, μπορούμε να κάνουμε συγκρίσεις, π.χ. ότι $T_1 > T_2$, $A_1 < A_2$, κλπ.



Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ κάνει ΓΑΤ με εξίσωση $x = 0,2 \cdot \eta \mu(10 \cdot t + 3\pi/2)$ στο S.I. Με τη βοήθεια και του προηγούμενου σχήματος να βρείτε τις τιμές των x , v , a , U και K τις στιγμές $t=0$ και $t=T/4$.

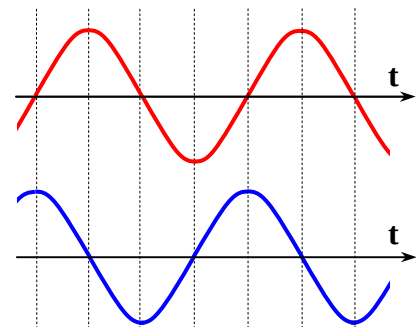
$$[-0,2m \quad 0 \quad 20\text{m/s}^2 \quad 2\text{J} \quad 0]$$

$$[0 \quad +2\text{m/s} \quad 0 \quad 0 \quad 2\text{J}]$$



Κάποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις του διπλανού σχήματος απεικονίζει την ταχύτητα v ενός σώματος που κάνει ΓΑΤ, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να εξετάσετε ποιο από τα μεγέθη x , a , U ή K θα μπορούσε να απεικονίζει ή άλλη, δίνοντας και τις κατάλληλες εξηγήσεις.

$$[x, a]$$





Ένα σώμα εκτελεί ΓΑΤ με εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t)$ και ολική ενέργεια E . Να δείξετε ότι η ισχύς P της συνισταμένης δύναμης δίνεται από τη σχέση $P = -\omega \cdot E \cdot \eta\mu(2\omega \cdot t)$ και να την απεικονίσετε σε σχέση με το χρόνο t .



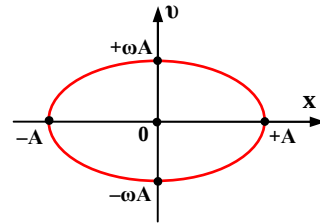
3-B.

Σε συνάρτηση με την απόμάκρυνση x

- Ταχύτητα v :

$$v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

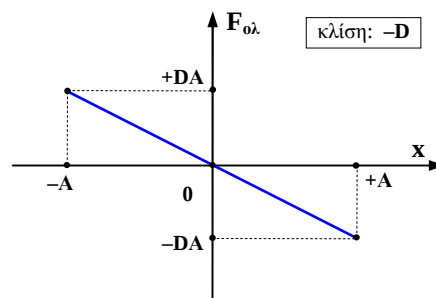
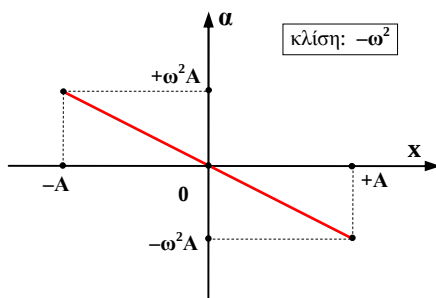
(Μήπως πρέπει να φρεσκάρετε τα μαθηματικά σας;)



- Επιτάχυνση a και δύναμη επαναφοράς $F_{ολ}$:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

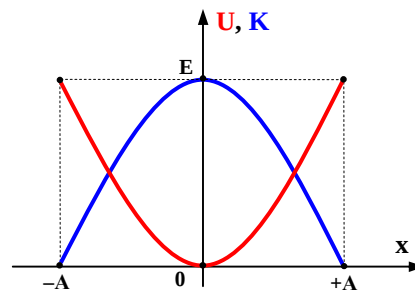
$$F_{ολ} = -D \cdot x$$



- Δυναμική και κινητική ενέργεια U, K :

$$U = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

$$K = E - \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$



Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ κάνει ΓΑΤ πλάτους $A = 0,2\text{m}$ και ολικής ενέργειας $E = 4\text{J}$. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας U και K σε συνάρτηση με την ταχύτητα v του σώματος.



3-Γ.

Τι παριστάνουν τα εμβαδά σε ορισμένες γραφικές παραστάσεις;

Τα εμβαδά σε κάποιες γραφικές παραστάσεις εκφράζουν την αριθμητική τιμή κάποιου φυσικού μεγέθους. Έτσι έχουν ενδιαφέρον από φυσική άποψη και βοηθούν να κατανοήσουμε καλύτερα το φαινόμενο της ΓΑΤ. Ακολουθούν μερικά τέτοια παραδείγματα:

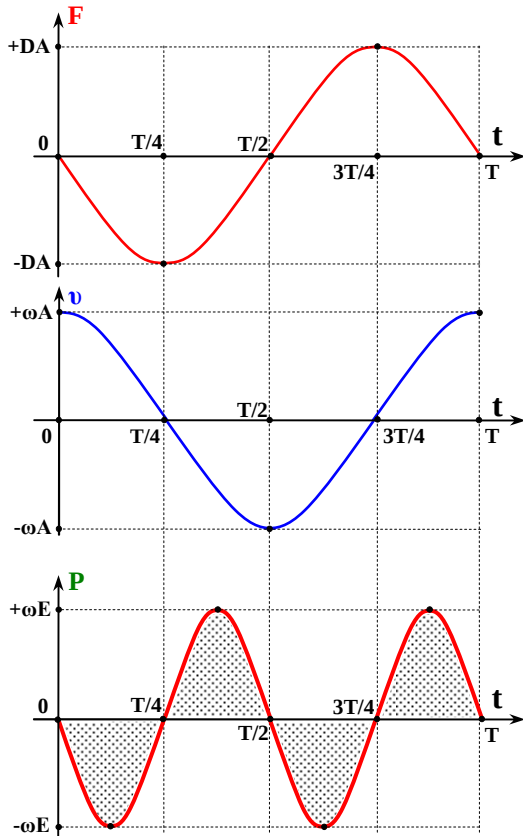
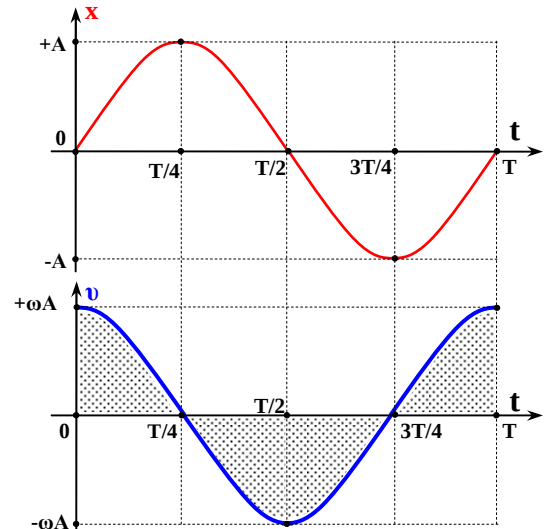
- Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τα διαγράμματα απομάκρυνσης x και ταχύτητας v ενός σώματος που κάνει ΓΑΤ σε σχέση με το χρόνο t .



Να σκεφτείτε τι εκφράζει γενικά το γινόμενο ταχύτητας – χρόνου και στη συνέχεια να εκτιμήσετε την αριθμητική τιμή του καθενός από τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα εμβαδά στο δεύτερο διάγραμμα.

$$[v \cdot dt = dx]$$



- Διάγραμμα ισχύος – χρόνου:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνισταμένης δύναμης F και της ταχύτητας v ενός σώματος που κάνει ΓΑΤ, καθώς και της συνολικής ισχύος P των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό, σε σχέση με το χρόνο t .



Να σκεφτείτε τι εκφράζει γενικά το γινόμενο ισχύος – χρόνου και στη συνέχεια να εκτιμήσετε την αριθμητική τιμή του καθενός από τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα εμβαδά στο τρίτο από τα τρία διαγράμματα.

$$[P \cdot dt = dW]$$

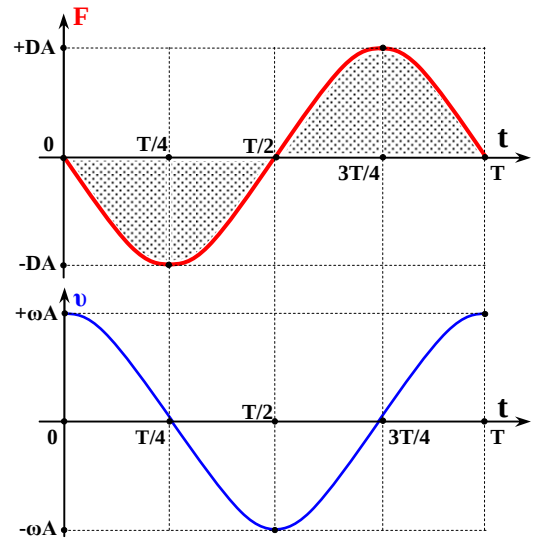
- Διάγραμμα δύναμης – χρόνου:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τα διαγράμματα συνισταμένης δύναμης F και ταχύτητας v ενός σώματος που κάνει ΓΑΤ σε σχέση με το χρόνο t .



Να σκεφτείτε τι εκφράζει γενικά το γινόμενο δύναμης – χρόνου και στη συνέχεια να εκτιμήσετε την αριθμητική τιμή του καθενός από τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα εμβαδά στο πρώτο διάγραμμα.

$$[F \cdot dt = dp]$$



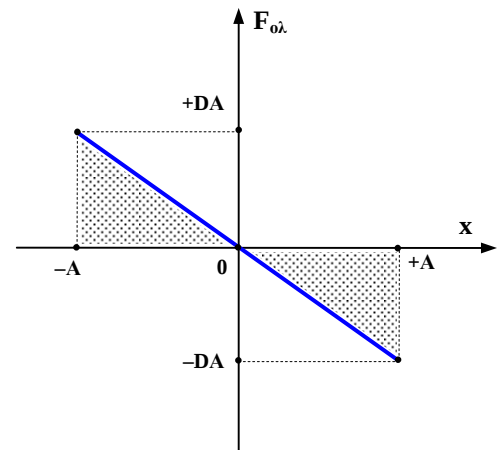
- Διάγραμμα δύναμης – απομάκρυνσης:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης $F_{ολ}$ ενός σώματος που κάνει ΓΑΤ σε σχέση με την απομάκρυνση x .



Να σκεφτείτε τι εκφράζει γενικά το γινόμενο δύναμης – μετατόπισης και στη συνέχεια να εκτιμήσετε την αριθμητική τιμή του καθενός από τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά.

$$[F \cdot dx = dW]$$



Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μητρόπουλος