Το Θ.Μ.Κ.Ε., η Α.Δ.Μ.Ε και η Α.Δ.Ε. Πότε ισχύουν;

1) Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) ή αλλιώς το θεώρημα έργου-ενέργειας:

α) Εφαρμόζεται για **ένα σώμα**.

β) Ισχύει **ΠΑΝΤΑ,** ανεξάρτητα από το είδος των ασκουμένων δυνάμεων.

γ) **Δεν μπορεί** να χρησιμοποιηθεί σε δύο περιπτώσεις:

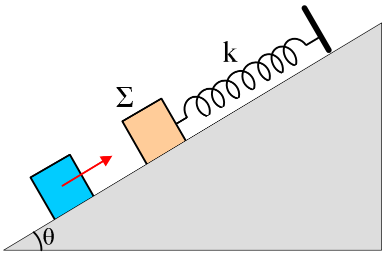
i) Αν στα δεδομένα ή στα ζητούμενα εμπλέκεται ο χρόνος.

ii) Αν μελετάμε ένα σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν. Αυτό, στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης αλληλεπίδρασης για το ένα σώμα.

Παράδειγμα 1°:

Ένα σώμα Σ μάζας 4kg ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ=30°, δεμένο στο κάτω άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k=200N/m. Σε μια στιγμή ένα δεύτερο σώμα που κινείται προς τα πάνω, συγκρούεται ελαστικά με το σώμα Σ. Αν το σώμα Σ μετακινηθεί κατά 0,2m πριν σταματήσει στιγμιαία, ποια η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση;

Δίνεται $g=10m/s^2$.



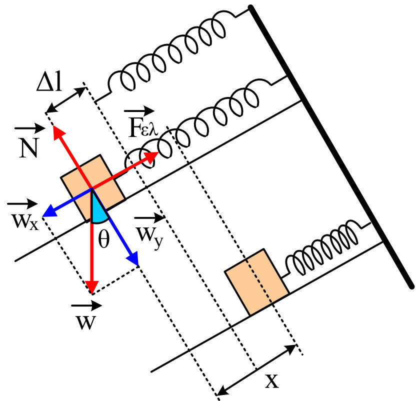
Απάντηση:

Στην αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda}=mg\eta\mu\theta \rightarrow k\Delta\ell=mg\eta\mu\theta$$

Και με αντικατάσταση $\Delta\ell=0{,}1m$.



Με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ από την θέση αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη θέση που σταματά στιγμιαία παίρνουμε:

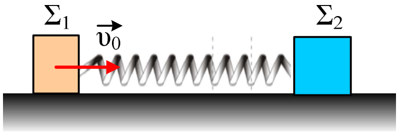
$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}= W_{wx}+W_{wy}+W_N+W_{F\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0-½\, m\upsilon^2 = -mg\eta\mu\theta\cdot x +0+0 + ½\, k(\Delta\ell)^2 – ½\, k(x-\Delta\ell)^2$$

και με αντικατάσταση $\upsilon=\sqrt{2}m/s$

Παράδειγμα 2°:

Δύο σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ με μάζες m_1=2kg και m_2=3kg ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα ελατηρίου σταθεράς k=480 N/m. Κάποια στιγμή κτυπάμε το $Σ_1$, το οποίο αποκτά αρχική ταχύτητα $υ_0$=10m/s με κατεύθυνση προς το $Σ_2$. Να βρεθεί η ταχύτητα του $Σ_1$, όταν το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δl=0,5m.



Απάντηση:

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για το $Σ_1$ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που το ελατήριο έχει συσπείρωση Δl, παίρνουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w W_N + W_{Fελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1 υ_0^2 = W_{Fελ} \quad (1)$$

Το έργο όμως της δύναμης του ελατηρίου δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε, αφού συνδέεται και με τα δυο σώματα (που έχουν την δυνατότητα να κινούνται) και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου συνδέεται με τις κινητικές ενέργειες και των δύο σωμάτων.

Συμπέρασμα: Η εξίσωση (1) προφανώς είναι σωστή, αλλά πρακτικά δεν μας βοηθάει στο να βρούμε την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$.

2) Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)

α) Εφαρμόζεται για **ένα σύστημα σωμάτων** και όχι για ένα σώμα.

β) Ισχύει **ΜΟΝΟ,** αν οι **όλες** οι δυνάμεις που παράγουν έργο, είναι **συντηρητικές** (**Διατηρητικές**).

i) Αν ένα σώμα κινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης, μέλος του συστήματος είναι και η Γη, αλλά συνήθως το «ξεχνάμε», μιας και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώμα-Γη, συνδέεται με την κινητική ενέργεια του σώματος. Έτσι λέμε «η δυναμική ενέργεια του σώματος» πράγμα που ενώ δεν είναι σωστό, ίσως απλοποιεί τα πράγματα και διευκολύνει τους μαθητές.

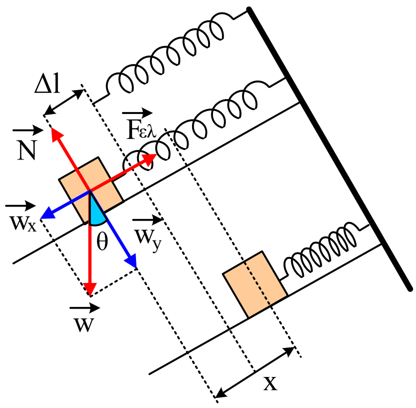
ii) Όταν εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ, μπορεί να ασκούνται διάφορες δυνάμεις στο σύστημά μας, που να μην είναι συντηρητικές. Αρκεί οι δυνάμεις αυτές να μην παράγουν έργο.

Παράδειγμα 3°:

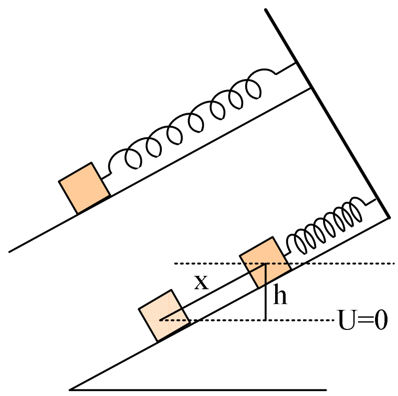
Να λυθεί το παράδειγμα 1° με εφαρμογή της ΑΔΜΕ.

Απάντηση:

Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Το βάρος w και η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$ είναι συντηρητικές, ενώ η κάθετη αντίδραση N του επιπέδου δεν παράγει έργο, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Ποια μηχανική ενέργεια; ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ. Το σύστημά μας είναι: Το σώμα Σ, το ελατήριο και η ΓΗ.



Με εφαρμογή της ΑΔΜΕ για το σύστημα σώμα Σ-ελατήριο-Γη από την θέση αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη θέση που σταματά στιγμιαία το σώμα και θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την χαμηλότερη θέση, παίρνουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχβ}+U_{αρχ,ελ}=K_{τελ}+U_{τελβ}+U_{τελ,ελ} \quad (1)$$

Όπου $U_β$ η βαρυτική δυναμική και $U_{ελ}$ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης).

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+0+\frac{1}{2}k\Delta\ell^2=0+mgh+\frac{1}{2}k\left(x-\Delta\ell\right)^2 \quad (2)$$

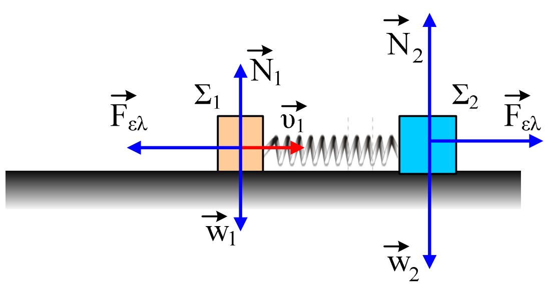
Αλλά με βάση το σχήμα h=x·ημθ και με αντικατάσταση στην (1) τελικά βρίσκουμε:

$$\upsilon=\sqrt{2}m/s$$

Παράδειγμα 4°:

Να απαντηθεί το 2° παράδειγμα με χρήση της ΑΔΜΕ.

Απάντηση:



Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Το σύστημά μας είναι τα δύο σώματα και το ελατήριο. Τα δύο βάρη και οι δυνάμεις από το ελατήριο είναι συντηρητικές, ενώ οι κάθετες αντιδράσεις του επιπέδου δεν παράγουν έργο. Συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και έχουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2+0=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \ (1)$$

Το σύστημά μας είναι μονωμένο και ισχύει και η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{P}_{αρχ}=\vec{P}_{τελ}\rightarrow$$

$$m_1\cdot\upsilon_0=m_1\upsilon_1+m_2\cdot\upsilon_2 \ (2)$$

Από (1) και (2) με αντικατάσταση παίρνουμε:

υ_1= 4m/s.

3) Η αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε.)

α) Εφαρμόζεται για **ένα σύστημα σωμάτων που μπορεί να είναι και το ΣΥΜΠΑΝ** όλο.

β) Ισχύει **ΠΑΝΤΑ.**

Σχόλιο:

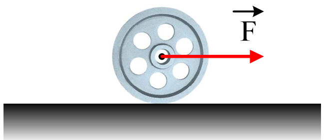
Στην πραγματικότητα τα πράγματα έχουν ακριβώς την αντίθετη σειρά. Η ΑΔΕ είναι μια γενική αρχή διατήρησης, που ισχύει σε όλες τις Φυσικές επιστήμες, χωρίς καμιά εξαίρεση, αν και σύμφωνα με την σύγχρονη Φυσική επεκτείνεται ώστε να συμπεριλάβει και την ύλη, έτσι ώστε σήμερα να μιλάμε για διατήρηση της υλοενέργειας.

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, είναι μια υποπερίπτωση της ΑΔΕ, όταν έχουμε μόνο συντηρητικές δυνάμεις, ενώ το Θ,Μ.Κ.Ε. είναι αυτό που λέει το όνομά του.

Ένα θεώρημα, που εφαρμόζεται για ένα σώμα και συνδέει τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

Παράδειγμα 5°:

Πάνω σε ένα μη λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας Μ=20kg και ακτίνας R=0,6m. Σε μια στιγμή δέχεται στο κέντρο του μια σταθερή οριζόντια δύναμη **F** μέτρου 100Ν, όπως στο σχήμα. Όταν ο τροχός έχει περιστραφεί κατά γωνία θ=15rad, το κέντρο Ο του τροχού, έχει μετατοπισθεί κατά x=18m.



i) Πόση ενέργεια μετεφέρθη στον τροχό, μέσω της δύναμης F;

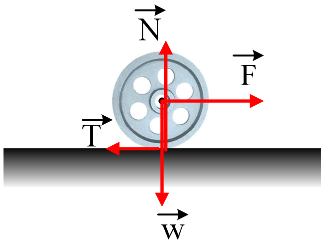
ii) Πόση θερμότητα παρήχθη εξαιτίας της τριβής;

Για τον τροχό δίνεται I= ½ MR^2.

Απάντηση:

i) Η ενέργεια που μετεφέρθη στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης είναι ίση με το έργο της F:

$W_F = F \cdot x \cdot συν0° = 1800J$.



ii) Στο σχήμα βλέπετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.

Για την μεταφορική κίνηση του τροχού έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$F - T = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Αντίστοιχα για την στροφική του κίνηση:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow$$

$$T \cdot R = ½ MR^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow$$

$$T = ½ MR \cdot \alpha_{γων} \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο τροχός εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση για την οποία ισχύουν:

$$υ = \alpha_{cm} \cdot t \quad (3)$$

$$x = ½ \alpha_{cm} \cdot t^2 \quad (4)$$

και στροφική ομαλά επιταχυνόμενη γύρω από τον άξονα του τροχού που περνά από το κέντρο του, για την οποία έχουμε:

$$\omega = \alpha_{γων} \cdot t \quad (5) \text{ και}$$

$$\theta = ½ \alpha_{γων} \cdot t^2 \quad (6)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:

$$\frac{x}{\theta} = \frac{a_{cm}}{a_{γων}} \quad (7)$$

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{F - T}{T} = \frac{a_{cm}}{\frac{1}{2} R \cdot a_{γων}}$$

και από την (7):

$$\frac{F - T}{T} = \frac{2x}{R \cdot \theta}$$

από την οποία με αντικατάσταση T=20N.

Οπότε από τις προηγούμενες εξισώσεις (1) και (2) $\alpha_{cm} = 4 m/s^2$ και $\alpha_{γων} = 10/3 \ rad/s^2$.

Τότε η (4) δίνει t=3s

Και οι ταχύτητες του τροχού είναι:

$$υ_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t = 12m/s \quad \text{και} \quad \omega = \alpha_{γων} \cdot t = 10rad/s.$$

Άρα ο τροχός έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}MR^2\omega^2$$

και με αντικατάσταση

$$K=1620J.$$

Με βάση την διατήρηση της ενέργειας έχουμε, ότι η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον τροχό, να είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας που έχει ο τροχός (Κινητική) συν την ενέργεια που μετετράπη σε θερμική, εξαιτίας της τριβής.

$$W_F = K+Q \rightarrow$$

$$Q = 1800J-1620J = 180J.$$

Σχόλιο:

Προφανώς η άσκηση μπορεί να λυθεί με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. (αφήνεται για …. προπόνηση), δεν μπορεί να επιλυθεί όμως με εφαρμογή της ΑΔΜΕ, αφού παράγεται θερμότητα, μια μορφή ενέργειας που δεν είναι μηχανική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια
Διονύσης Μάργαρης