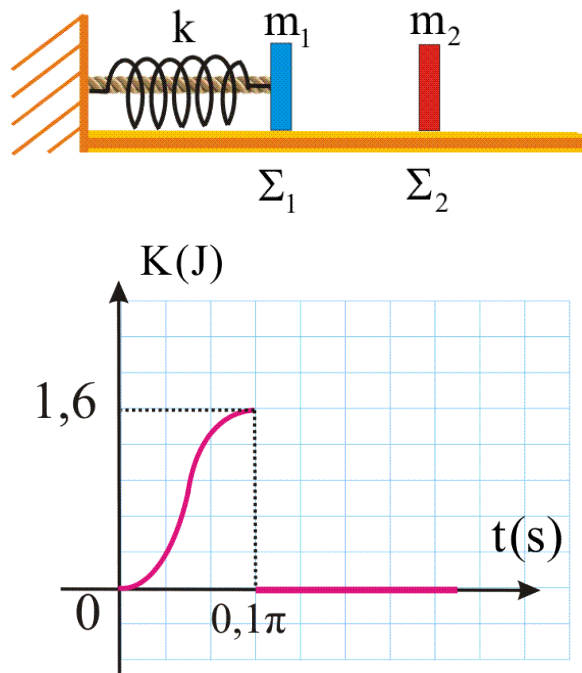


Το ελάχιστο που μπορείς να κάνεις για να με σταματήσεις!

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k = 20 \text{ N/m}$ το αριστερό άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το δάπεδο πάνω στο οποίο μπορεί να κινηθεί το σώμα Σ_1 είναι λείο. Με τη βοήθεια νήματος το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά απόσταση d σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα με αποτέλεσμα το σώμα Σ_1 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Σε κάποια άγνωστη απόσταση από το σώμα Σ_1 βρίσκεται ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.



α. Η σύγκρουση των δύο σωμάτων γίνεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Πόση είναι η μάζα m_1 του σώματος Σ_1 ;

γ. Πόση είναι η αρχική απόσταση των δύο σωμάτων;

δ. Πόσο ήταν το μέτρο της τάσης του νήματος λίγο πριν το κόψουμε;

ε. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της μάζας m_2 του σώματος Σ_2 έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η παραπάνω κρούση;

στ. Θεωρώντας ότι το σώμα Σ_2 έχει μάζα ίση με την ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει για να συμβεί το παραπάνω φαινόμενο, να βρείτε την απόσταση των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,2\pi \text{ s}$.

Θεωρήστε αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης.

Λύση

α. Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι το σώμα Σ_1 έχει κινητική ενέργεια μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,1\pi \text{ s}$. Επειδή αμέσως μετά το σώμα Σ_1 δεν έχει κινητική ενέργεια, συμπεραίνουμε ότι μετά την κρούση σταματάει να κινείται. Αυτό σημαίνει ότι η κρούση γίνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου γιατί αν γινόταν σε

οποιαδήποτε άλλη θέση, αμέσως μετά την κρούση θα υπήρχε συνισταμένη δύναμη διάφορη του μηδενός και μια νέα ταλάντωση (και όχι μηδενισμός της κινητικής ενέργειας του Σ_1 που συμβαίνει τώρα).

β. Το σώμα Σ_1 πρόλαβε επομένως να κινηθεί μόνο για χρόνο $T/4$ (όσο χρόνο διήρκεσε η μετάβασή του από την ακραία θέση στη θέση ισορροπίας), όπου T η περίοδος της ταλάντωσής του. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, αυτή η χρονική στιγμή είναι ίση με $0,1\pi$ s. Επομένως:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = 0,1\pi \text{ s} \Rightarrow T = 0,4\pi \text{ s}$$

Επομένως για τη μάζα m_1 του σώματος Σ_1 θα ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow m_1 = \frac{k \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{20 \cdot (0,4\pi)^2}{4\pi^2} \text{ kg} \Rightarrow \mathbf{m_1 = 0,8 \text{ kg}}$$

γ. Αφού η κρούση γίνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η αρχική απόσταση των σωμάτων είναι ίση με d , δηλαδή ίση με το πλάτος της ταλάντωσης. Για τη μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος, όπως μπορούμε να δούμε και από το διάγραμμα, ισούται με $1,6$ J. Άρα:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6}{20}} \text{ m} \Rightarrow \mathbf{A = 0,4 \text{ m}}$$

Επομένως **$d = 0,4 \text{ m}$** .

δ. Ελάχιστα πριν κόψουμε το νήμα, το σώμα Σ_1 ισορροπούσε με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου και της τάσης του νήματος. Οπότε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T = F_{\text{ελ}} = kd = (20 \cdot 0,4) \text{ N} \Rightarrow \mathbf{T = 8 \text{ N}}$$

ε. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε κρούση θα πρέπει η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι μεγαλύτερη ή ίση με την τελική κινητική ενέργεια του συστήματος. Δηλαδή:

$$K_{\text{ολ.,αρχ}} \geq K_{\text{ολ.,τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 \geq \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow m_1v_1^2 \geq m_2v_2'^2 \quad (1)$$

Λόγω της κρούσης και επειδή το σύστημα είναι μονωμένο, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής. Είναι:

$$\vec{p}_{\text{ολ.,αρχ}} = \vec{p}_{\text{ολ.,τελ}} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_2} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$m_1v_1^2 \geq m_2 \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2} \right)^2 \Rightarrow m_1v_1^2 \geq m_2 \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{m_2^2} \Rightarrow 1 \geq \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 \geq m_1$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή της μάζας του σώματος Σ_2 είναι:

$$m_{2,\min} = 0,8 \text{ kg}$$

στ. Έχοντας το σώμα Σ_2 μάζας ίση με 0,8 kg, η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων θα είναι ελαστική, οπότε γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων. Η ταχύτητα με την οποία θα κινείται το σώμα Σ_2 μετά την κρούση θα είναι:

$$v_2' = v_1 = 2 \text{ m/s}$$

Με την ταχύτητα αυτή θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, οπότε σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 0,2\pi \text{ s} - 0,1\pi \text{ s} = 0,1\pi \text{ s}$ θα έχει μετατοπιστεί κατά:

$$d' = v_2' \Delta t = (2 \cdot 0,1\pi) \text{ m} = 0,2\pi \text{ m}$$

Και επειδή το σώμα Σ_1 ακινητοποιήθηκε, τα δύο σώματα θα απέχουν τότε απόσταση:

$$d' = 0,2\pi \text{ m}$$

Επιμέλεια:
Νεκτάριος Πρωτοπαπάς
nprotopapas@avgouleaschool.gr