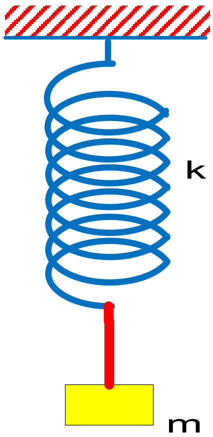
Απλή Αρμονική Ταλάντωση και Τεντωμένο Νήμα

Ένα σώμα μάζας m, κρέμεται από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k (αμελητέας μάζας) με τη βοήθεια ενός μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

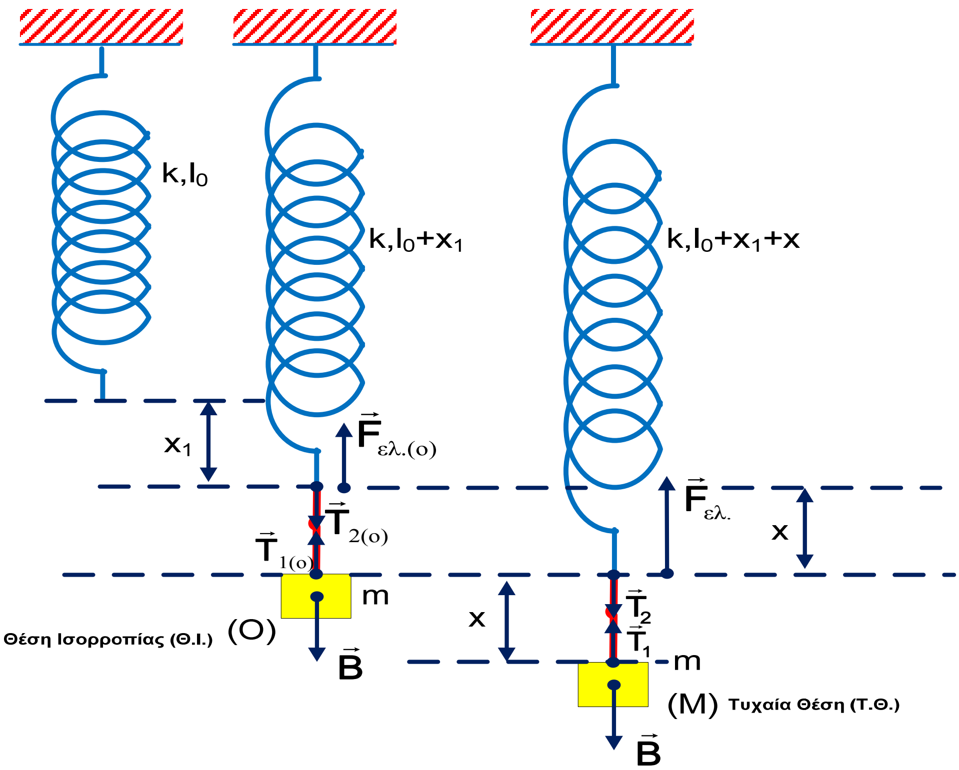
I. Να δείξετε ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

II. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη απομάκρυνση του ελατηρίου, ώστε το νήμα να είναι διαρκώς τεντωμένο.



Δίνεται $g=10m/s^2$

Απάντηση:



Ερώτημα Ι:

T1: Η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα.
T2: Η τάση του νήματος που ασκείται στο ελατήριο.
$\rightarrow \boxed{\mathbf{T_1 = T_2}}$ (κατά μέτρο)

- Στο σημείο όπου ενώνεται το ελεύθερο άκρο τους ελατηρίου με το νήμα θα ισχύει: $\mathbf{T_2 = F_{ελ.}} \rightarrow$ Άρα, συνεχώς $\boxed{\mathbf{T_1 = F_{ελ.}}}$ (1)
- Επιπλέον, όση είναι η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. τόση είναι η επιπλέον παραμόρφωση του ελατηρίου.
- Οπότε στην Θ.Ι. (Ο) (θεωρούμε θετική φόρα την προς τα κάτω) έχουμε: $\mathbf{\Sigma F = 0} \rightarrow \mathbf{T_{1(O)} = B} \rightarrow$ (από (1)), $\mathbf{F_{ελ.(O)} = B} \rightarrow \mathbf{kx_1 = mg} \rightarrow \boxed{\mathbf{mg - kx_1 = 0}}$ (2)
- Στην τυχαία θέση (Μ), όπου το σώμα βρίσκεται σε απόσταση x κάτω από τη Θ.Ι. (Ο), θα έχουμε:

  $\mathbf{\Sigma F = 0} \rightarrow \mathbf{\Sigma F = B - T_1} \rightarrow$ (από (1)), $\mathbf{\Sigma F = B - F_{ελ.}} \rightarrow \mathbf{\Sigma F = mg - k(x_1 + x)} \rightarrow$

  $\rightarrow \mathbf{\Sigma F = mg - kx_1 - kx} \rightarrow$ (με χρήση της (2)) $\boxed{\mathbf{\Sigma F = - kx}}$.

  Αφού η συνισταμένη δύναμη **ΣF** είναι της μορφής **– Dx**, το σύστημα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση (**Α.Α.Τ.**), με σταθερά επαναφοράς **D = k.**

  Η περίοδο της ταλάντωσης είναι: $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{m/D}} \rightarrow \boxed{\mathbf{T = 2\pi\sqrt{m/k}}}$

*<u>Παρατήρηση:</u> εάν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση x πάνω από τη θέση ισορροπίας και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο **(η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι $x - x_1$),** θα έχουμε (θεωρούμε θετική φορά την προς τα πάνω):*
*$\mathbf{\Sigma F = 0} \rightarrow \mathbf{\Sigma F = - B + T_1} \rightarrow (\mathbf{T_1 = - F_{ελ.}})$, $\mathbf{\Sigma F = - B - F_{ελ.}} \rightarrow \mathbf{\Sigma F = - mg - k(x - x_1)} \rightarrow \mathbf{\Sigma F = - mg - kx + kx_1} \rightarrow$ (με χρήση της (2)) $\boxed{\mathbf{\Sigma F = - kx}}$, δηλαδή **D = k, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως.***

Ερώτημα ΙΙ:

- Στην τυχαία Θέση (Μ) θα έχουμε (για διευκόλυνση, θεωρούμε θετική φορά την προς τα κάτω):

  $\mathbf{\Sigma F = B - T_1} \rightarrow (\mathbf{\Sigma F = - Dx = - kx}), \mathbf{- kx = B - T_1} \rightarrow \boxed{\mathbf{T_1 = mg + kx}}$ (3)
- Για να είναι το νήμα διαρκώς τεντωμένο πρέπει $\boxed{\mathbf{T_1 \geq 0}}$ (4)
- Από (3) και (4) $\rightarrow \mathbf{mg + kx \geq 0} \rightarrow \mathbf{kx \geq - mg} \rightarrow$

  $$\rightarrow \boxed{\mathbf{x \geq - (mg)/k,\ για\ κάθε\ x \epsilon [- x_0, x_0].}}$$

  Όποτε αρκεί το μικρότερο από τα x, δηλαδή το $- x_0$ να ικανοποιεί τη παραπάνω σχέση.

Άρα $-\mathbf{x_0} \geq -\mathbf{(mg)/k} \rightarrow \mathbf{x_0} \leq \mathbf{(mg)/k} \rightarrow \boxed{\mathbf{x_{0(max)} = (mg)/k}}$

Επομένως η μέγιστη απομάκρυνση του ελατηρίου, ώστε το νήμα να παραμένει διαρκώς τεντωμένο είναι $\boxed{\mathbf{x_{0(max)} = (mg)/k.}}$

Παρατήρηση: *Προφανώς, όταν* $\boldsymbol{x \geq 0}$ *(δηλαδή προς τα κάτω)* →

→ ***από (3),*** $\boldsymbol{T_1 > 0}$***, άρα αποκλείεται να λυγίσει το νήμα.***

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής