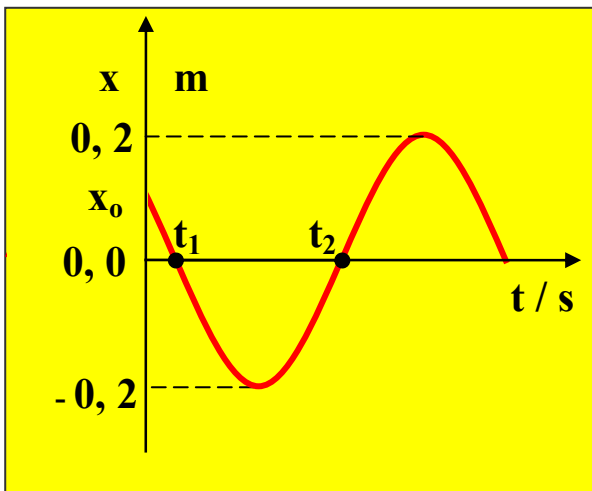


Διάγραμμα απομάκρυνσης – χρόνου , εξισώσεις κίνησης και αρχικές τιμές



Το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου είναι ακλόνητο. Στο άλλο άκρο του, είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο όπου $t_1 = \pi/72 \text{ s}$ και $t_2 = 7\pi/72 \text{ s}$.

Να βρεθούν:

1. Η συνάρτηση απομάκρυνσης - χρόνου $x = f(t)$
2. Η συνάρτηση ταχύτητας - χρόνου $v = f(t)$ και να παρασταθεί γραφικά.
3. Η αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
4. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος.

Απάντηση

1. Η εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου είναι $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Από το διάγραμμα που δίνεται προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{7\pi}{72}\text{s} - \frac{\pi}{72}\text{s} = \frac{T}{2} \quad \text{άρα} \quad T = \frac{\pi}{6}\text{s} \quad \text{και επειδή} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{θα είναι} \quad \omega = 12 \text{ rad/s} \quad (2).$$

$$\Rightarrow x_{\max} = A = 0,2 \text{ m} \quad (3)$$

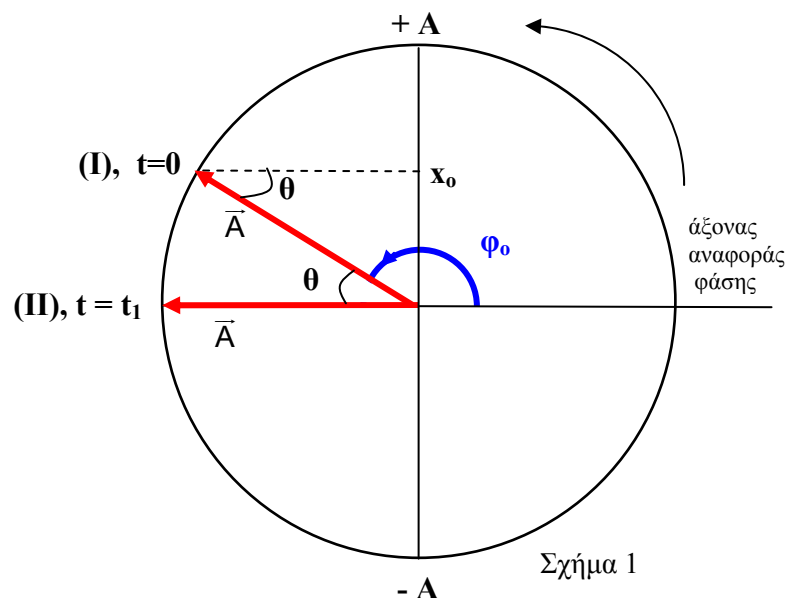
$\Rightarrow$ Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση είναι $x = x_0 > 0$, και αμέσως μετά ελαττώνεται για να μηδενιστεί λίγο αργότερα τη χρονική στιγμή t_1 .

Αυτό σημαίνει ότι, το κινητό βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα κατευθυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας του και το περιστρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}$ βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση (I) του κύκλου αναφοράς της ταλάντωσης όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

$\Rightarrow$ Τη χρονική στιγμή t_1 , το κινητό φτάνει στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά, και το διάνυσμα $\vec{A}$, έχει διαγράψει γωνία θ με $\theta = \omega t_1$ και με βάση την (2) $\theta = \pi/6 \text{ rad}$, άρα

$$\text{όπως προκύπτει από το σχήμα 1} \quad \phi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad (4)$$

Τελικά η (1) με βάση τις (3), (4) γράφεται έτσι



$$x = 0,2\eta\mu\left(12t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ SI} \quad (5)$$

2. Η συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου έχει τη μορφή $v = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ και με βάση τις (2), (3), (4) :

$$v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ SI} \quad (6)$$

Από την (6) :

$$\text{Για } t = 0 \text{ έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1,2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Για } t = t_1 = \pi/72 \text{ s έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot \frac{\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

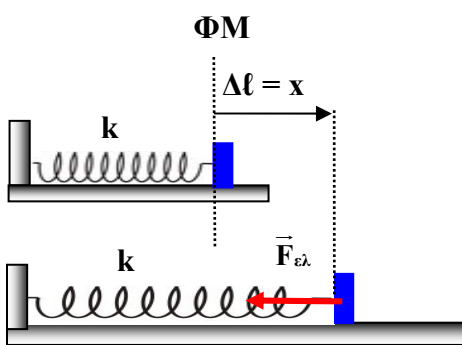
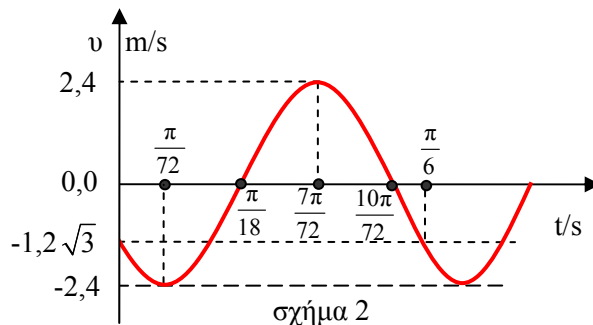
$$\text{Για } t = t_1 + T/4 = \pi/18 \text{ s έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0$$

$$\text{Για } t = t_2 = 7\pi/72 \text{ s έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot \frac{7\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = +2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Για } t = t_2 + T/4 = 10\pi/72 \text{ s έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot \frac{10\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0$$

$$\text{Για } t = T = \pi/6 \text{ s έχουμε } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1,2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της (6) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



σχήμα 3

3. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta l^2$$

όπου Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου.

Όμως, η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα στην διεύθυνση της κίνησής του πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι η δύναμη από το ελατήριο - σχήμα 3 -

δηλαδή $\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_{ελ}$, ή $F_{ολ} = -k \cdot \Delta l$.

Έτσι, στο σημείο του φυσικού μήκους του ελατηρίου όπου

είναι $\Delta \ell = 0$, είναι και $\vec{F}_{o\lambda} = \vec{0}$, άρα εκεί είναι το κέντρο της ταλάντωσης , η παραμόρφωση $\Delta \ell$ του ελατηρίου συμπίπτει με την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας του ($\Delta \ell = x$) , και $F_{o\lambda} = -k \cdot x$, δηλαδή έχει την μορφή $F_{o\lambda} = -D \cdot x$ και $D = k$.

Άρα $\frac{1}{2}k \cdot \Delta \ell^2 = \frac{1}{2}D \cdot x^2$ ή $U_{ελ} = U_{ταλ}$ και

$$U_{ελ, αρχ} = \frac{1}{2}k\Delta \ell_{αρχ}^2 = \frac{1}{2}kx_o^2 \quad (7) \text{ - σχήμα 4.}$$

Επιστρέφουμε στο σχήμα 1 κι έχουμε ότι

$$x_o = A \cdot \eta \mu \theta = 0,2 \cdot 0,5 \text{ m} = 0,1 \text{ m} \quad (8)$$

Κι επειδή $k = m\omega^2$ με βάση την (2) έχουμε ότι

$$k = 144 \text{ N/m} \quad (9)$$

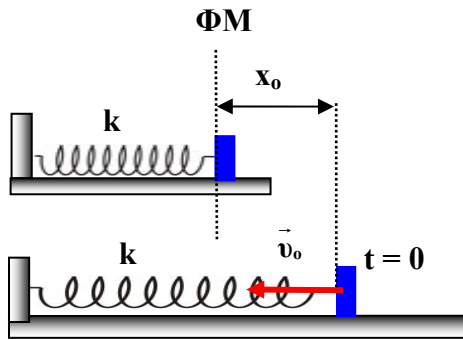
Από την (7) με βάση τις (8) και (9) έχουμε

$$U_{ελ, αρχ} = 0,72 \text{ J}$$

4. Επειδή $U_{ελ} = U_{ταλ}$ θα είναι και $U_{ελ, αρχ} = U_{ταλ, αρχ} = 0,72 \text{ J}$.

Με βάση τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) έχουμε ότι

$$K_{αρχ} + U_{ταλ, αρχ} = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \text{ από την οποία προκύπτει ότι } K_{αρχ} = 2,16 \text{ J} .$$



σχήμα 4

Μανώλης Δρακάκης
3ο Λύκειο Χανίων
drakakismanolis@gmail.com