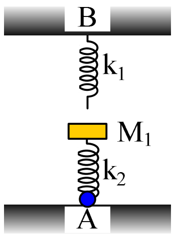
# *Διπλή αλλαγή θέσης ισορροπίας*

Τα ελατήρια στο παρακάτω σχήμα έχουν ίδιο φυσικό μήκος Lo=0,6m έχουν σταθερές $K_1 = K_2$=200N/m και είναι στερεωμένα στην ίδια κατακόρυφο στα σημεία Α και Β και σε απόσταση ΑΒ=1,2m.




Πάνω στο ελατήριο με σταθερά $K_1$ ισορροπεί δεμένο σημειακό σώμα μάζας $M_1$=2Kg. Από τη θέση Α εκτοξεύουμε κατακόρυφα δεύτερο σημειακό μάζας $M_2$=2Kg με αρχική ταχύτητα $υ_o$=4 m/s με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να συγκρουστούν πλαστικά. Αν μετά την πλαστική κρούση το σύστημα των δύο σωμάτων ενώνεται ακαριαία και χωρίς απώλεια ενέργειας με το δεύτερο ελατήριο σταθεράς $K_1$ να βρεθούν:

i) Η απώλεια ενέργειας κατά την πλαστική κρούση

ii) Η ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει τελικά το σύστημα

iii) Ο χρόνος μετά την κρούση που θα χρειασθεί το σύστημα των δύο σωμάτων μέχρι να αποκτήσει για πρώτη φορά την μέγιστη ταχύτητά του.

**Απάντηση:**

i) Από την ισορροπία του σώματος $M_1$ θα έχουμε $K_2.x_1=M_1.g$ άρα $x_1$=0,1m.

Με τη βοήθεια της ΑΔΕ για την άνοδο του σώματος $M_2$ θα έχουμε

$$½.M_2 \cdot υo^2 = ½\, M_2 \cdot υ^2 + M_2 \cdot g \cdot (Lo - x_1)$$

μετά από πράξεις υ=$\sqrt{6} m/s$.

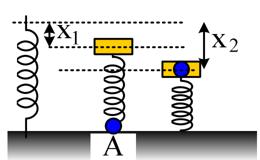
Αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ για την πλαστική κρούση $M_2 \cdot υ=(M_1+M_2) \cdot υσ_{υς}$ θα βρούμε:

$$υ_{συσ} = \sqrt{1{,}5}\, m/s$$

Αν πάρουμε μία ΑΔΕ για την κρούση θα έχουμε

$$\frac{1}{2}M_2υ^2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)υ^2_{συσ} + Q_{κρούσης},$$ θα βρεθεί $Q_{κρουσης}$=3J

ii) Με την αύξηση της μάζας εξαιτίας της κρούσης έχουμε και αλλαγή της θέσης ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα. Για την νέα θέση ισορροπίας θα έχουμε $K_2 \cdot x_2=(M_1+M_2) \cdot g$ άρα $x_2$=0,2 m.




Με την βοήθεια της ΑΔΕΤ για την αρχική ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα και πριν γίνει η σύγκρουση με το δεύτερο ελατήριο θα έχουμε

$$\frac{1}{2}M_{ολ}υ^2_{συστ} + \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}K_2A^2$$ άρα Α=0,2m.

Παρατηρώ ότι το πλάτος ταυτίζεται με την συσπείρωση του ελατηρίου για την θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο τελικά μόλις και φτάνει στην θέση του φυσικού του μήκους. Η θέση όμως αυτή είναι η θέση του φυσικού μήκους και του δεύτερου ελατηρίου μιας και η απόσταση AB=2Lo. Άρα εκείνη την στιγμή πάνω στο σώμα που δεν έχει στιγμιαία ταχύτητα γανζώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και το δεύτερο ελατήριο με σταθερά $K_1$. Μετά το γάντζωμα και του δεύτερου ελατηρίου θα αλλάξει και πάλι η θέση ισορροπίας εξαιτίας της αλλαγής της σταθεράς επαναφοράς της ταλάντωσης. Η νέα θέση ισορροπίας θα βρεθεί από την συνθήκη ισορροπίας $(K_2+K_1).x_3=(M_1+M_2).g$ άρα $x_3$=0,1m. Το $x_3$ ταυτίζεται με το νέο πλάτος της νέας ταλάντωσης

Η ενέργεια της τελικής ταλάντωση θα είναι $E_{ταλ}=\frac{1}{2}(K_1+K_2)A^2_{τελ}$=2J.

iii) Παρατηρώ ότι μετά την πρώτη κρούση το σώμα θα εκτελέσει δύο διαφορετικές αλλά διαδοχικές γ.α.τ. Η πρώτη είναι ταλάντωση με περίοδο:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{M_1+M_2}{K_2}}=\frac{2\pi}{5\sqrt{2}}s$$ και στην συνέχεια με $$T_2=2\pi\sqrt{\frac{M_1+M_2}{K_1+K_2}}=\frac{2\pi}{5}s.$$

Η θέση της κρούσης ισοδυναμεί με το μισό του αρχικού πλάτους άρα θα χρειασθεί χρόνο $T_1/6$ μέχρι να φτάσει στην θέση μέγιστης αρχικής απομάκρυνσης. Στην συνέχεια θα χρειασθεί χρόνο $T_2/4$ μέχρι να φτάσει για πρώτη φορά στην τελική θέση ισορροπίας του από την ακραία του θέση. Αρα ο συνολικός ζητούμενος χρόνος θα είναι:

$$t_{ολ}=\frac{T_1}{6}+\frac{T_2}{4}=\left(\frac{2\pi}{30\sqrt{2}}+\frac{\pi}{20}\right)s$$



Επιμέλεια

***Χρήστος Ελευθερίου***