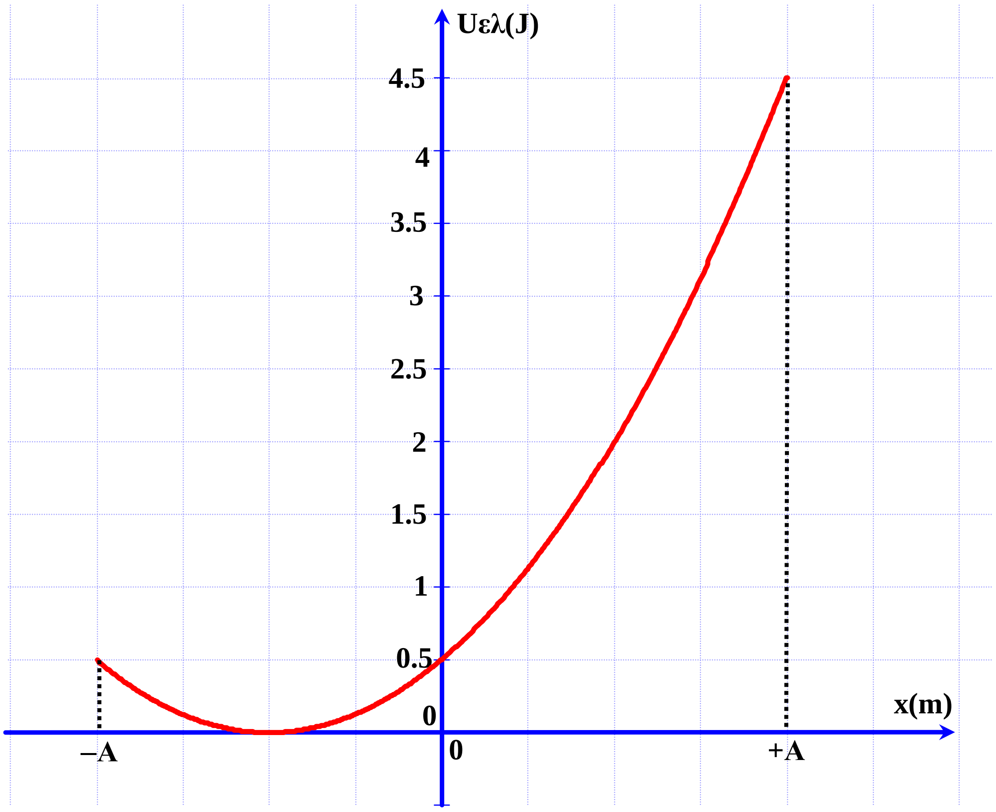
Δυναμική ενέργεια ελατηρίου

Σώμα μάζας m=1kg ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οροφή. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d, και την χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου συναρτήσει της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του σώματος.



α. Να υπολογιστεί η παραμόρφωση $\Delta\ell_o$ του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος και το πλάτος της ταλάντωσης.

β. Να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου και η περίοδος της ταλάντωσης.

γ. Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας και της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, θεωρώντας ως θετική την φορά της αρχικής εκτροπής.

δ. Να υπολογιστούν τα έργα της δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης επαναφοράς κατά την μετάβαση του σώματος από την κάτω ακραία στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του.

ε. Να βρεθεί για πόσο χρονικό διάστημα στη διάρκεια μίας περιόδου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο περισσότερο από 0,2m;

Δίνεται: $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Πριν περάσουμε στην λύση να θυμηθούμε ότι η δυναμική ενέργεια ελατηρίου δίνεται από την σχέση:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

όπου $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου από την θέση φυσικού του μήκους.

Στην περίπτωση του κατακόρυφου ελατηρίου, όταν το σώμα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι μέγιστη και ίση με:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_o + A)^2$$

όπου $\Delta\ell_o$ η παραμόρφωση που έχει υποστεί το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του σώματος.

Τώρα:

☞ Εάν $A<\Delta\ell_o$, τότε προφανώς το σώμα δεν θα βρεθεί ποτέ στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, οπότε η δυναμική ενέργεια ελατηρίου θα έχει μη μηδενικές τιμές κατά την διάρκεια ταλάντωσης του σώματος, ενώ όταν το σώμα βρεθεί στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του θα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_o - A)^2$$

και αποτελεί την ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου

☞ Εάν $A>\Delta\ell_o$, τότε κάποια στιγμή καθώς το σώμα κινείται προς τα πάνω, κάποια στιγμή διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους ελατηρίου όπου εκεί

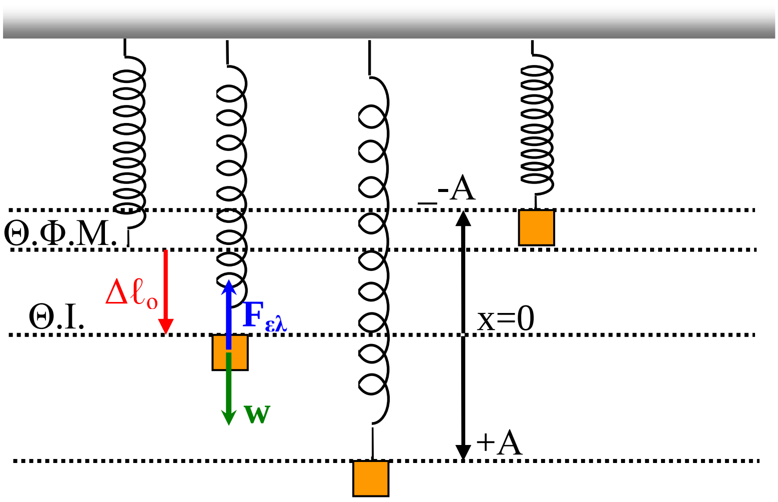
$$U_{\varepsilon\lambda}=0$$

η οποία αποτελεί και την ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Και στη συνέχεια όταν βρεθεί στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του, το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργεια

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(A - \Delta\ell_o)^2$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, όπως φαίνεται από το διάγραμμα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται σε κάποια θέση απομάκρυνσης, οπότε $A>\Delta\ell_o$.



α. Για τη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma F=0 \rightarrow k\Delta\ell_o=mg \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}}{U_{\varepsilon\lambda(\pi\acute{\alpha}\nu\omega)}}=\frac{4,5}{0,5} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell_o+A\right)^2}{\frac{1}{2}k\left(A-\Delta\ell_o\right)^2}=9$$

$$\frac{\Delta\ell_o+A}{A-\Delta\ell_o}=3 \rightarrow \Delta\ell_o+A=3A-3\Delta\ell_o$$

$$\rightarrow A=2\Delta\ell_o$$

Έτσι: $U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}=\frac{1}{2}k(\Delta\ell_o+A)^2 \rightarrow U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}=\frac{1}{2}k(3\Delta\ell_o)^2 \rightarrow U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}=\frac{9}{2}k\Delta\ell_o^{\,2}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{\frac{9}{2}k\Delta\ell_o^{\,2}}{k\Delta\ell_o}=\frac{U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}}{mg} \rightarrow \Delta\ell_o=\frac{2}{9}\cdot\frac{U_{\varepsilon\lambda(\kappa\acute{\alpha}\tau\omega)}}{mg}=\frac{2\cdot 4,5}{9\cdot 1\cdot 10} \rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_o=0,1m}$$

Οπότε: ***A=0,2m***

β. Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{(1)} \omega=\sqrt{\frac{g}{\Delta\ell_o}} \rightarrow \omega=10rad/s$$

Άρα η περίοδος ταλάντωσης είναι:

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boldsymbol{T=\frac{\pi}{5}s}$$

και η σταθερά του ελατηρίου:

$$D=k=m\cdot\omega^2 \rightarrow \boldsymbol{k=100N/m}$$

γ. Την t=0 το σώμα βρίσκεται στην θέση x=+A, οπότε η ταλάντωση του σώματος έχει αρχική φάση:

$$\varphi_o=\frac{\pi}{2}\text{rad}.$$

Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι:

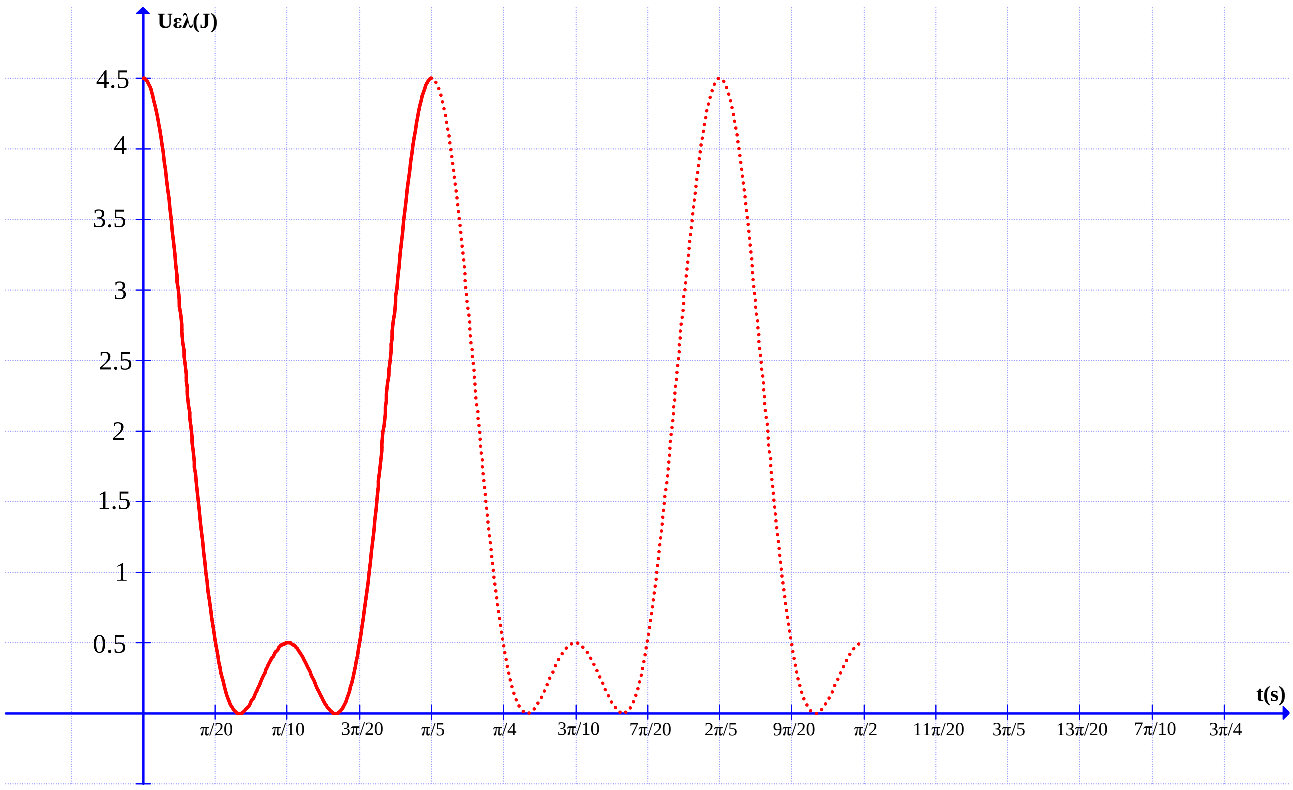
$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o) \rightarrow \boldsymbol{x=0,2\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου θα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}k(\Delta\ell_o+x)^2 \rightarrow U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot\left(0,1+0,2\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$$

$$\rightarrow \boldsymbol{U_{\varepsilon\lambda}=50\cdot(0,1+0,2\cdot\sigma\upsilon\nu 10t)^2}$$

Για τους λάτρεις γραφικών παραστάσεων δίνεται η $U_{ελ}$=f(t).



δ. Η δύναμη του ελατηρίου όπως και η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητικές δυνάμεις, οπότε το έργο τους θα ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας.

Έτσι, το έργο της δύναμης ελατηρίου κατά την μετάβαση από την κάτω ακραία μέχρι την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του είναι:

$$W_{F\ ελ} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} = 4{,}5 - 0{,}5 \rightarrow \boldsymbol{W_{F\ ελ} = +4J}$$

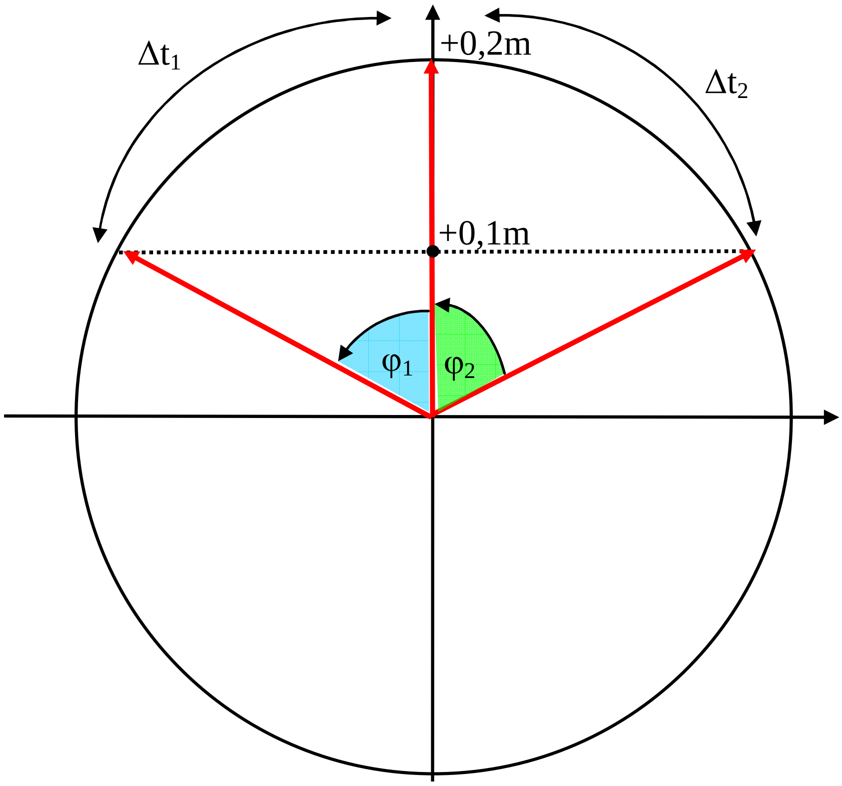
Το έργο της δύναμης επαναφοράς θα είναι:

$$W_{F\ επ} = -\Delta U_{ταλ} = U_{ταλ,αρχ} - U_{ταλ,τελ} = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k(-A)^2 \rightarrow \boldsymbol{W_{F\ επ} = 0J}$$

ε. Η παραμόρφωση του ελατηρίου κάθε χρονική στιγμή είναι: $\Delta\ell=\Delta\ell_o+x=0{,}1+x$.

Για να είναι επιμηκυμένο περισσότερο από 0,2m θα πρέπει $x \geq 0{,}1$m.

Το σώμα την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην ακραία θετική θέση απομάκρυνσης, άρα το περιστροφόμενο διάνυσμα θα βρίσκεται στην πάνω κατακόρυφη θέση. Το σώμα στην συνέχεια πλησιάζει προς την θέση ισορροπίας του, άρα το ελατήριο θα είναι επιμηκυμένο κατά την διάρκεια της διαδρομής +0,2m(+A)→+0,1m (απομακρυνόμενο από την ακραία θετική θέση +A). Μέχρι και να ξαναφτάσει το σώμα στην θέση +0,1m η επιμήκυνση θα είναι μικρότερη από την ζητούμενη. Τέλος πλησιάζοντας και πάλι προς την +A προκειμένου να ολοκληρωθεί μία ταλάντωση και κατά την μετάβαση +0,1m→+0,2m, η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι μεγαλύτερη από 0,2m.



$$\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3} rad$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{\varphi_1}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{30} s$$

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2\pi}{30} \rightarrow \boldsymbol{\Delta t_{o\lambda} = \frac{\pi}{15} s}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος