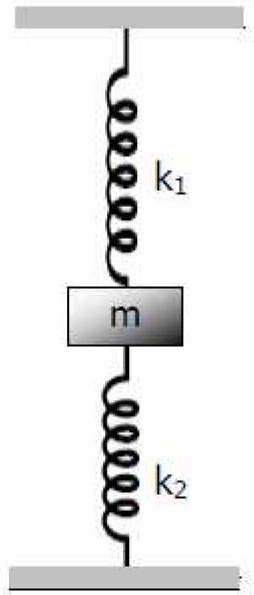
Δυο ελατήρια, δυνάμεις και ενέργειες.



Το σώμα μάζας m=1kg του σχήματος ισορροπεί στη θέση του σχήματος, όπου το ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_1=100N/m είναι επιμηκυμένο κατά Δl_1=0,07m και το ιδανικό ελατήριο σταθεράς K_2 είναι παραμορφωμένο κατά Δl_2=0,01m.

i) Να υπολογίσετε την σταθερά του ελατηρίου k_2.

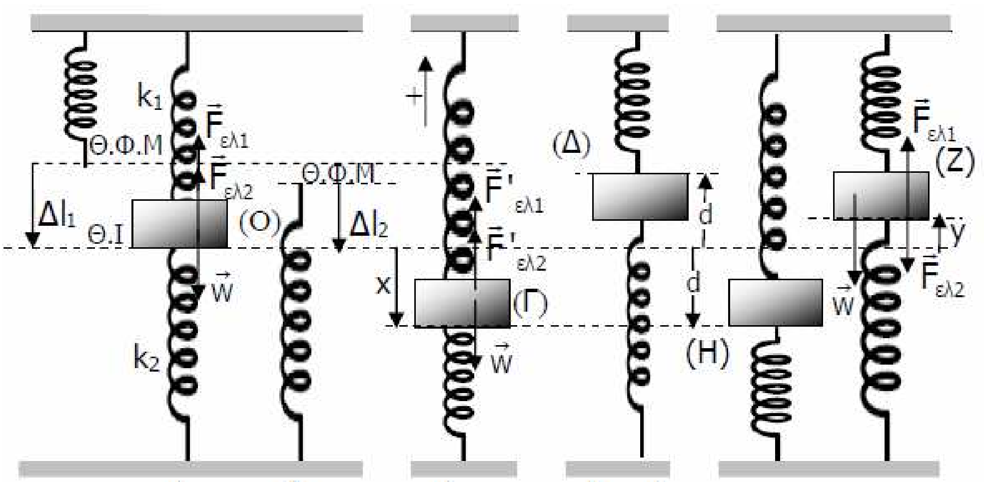
ii) Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ και να υπολογίσετε την συχνότητά της.

iii) Ανυψώνουμε το σώμα κατά d=0,05m προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.

iv) Να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το χρόνο τις αριθμητικές τιμές της δύναμης επαναφοράς της α.α.τ, $F_{επ}$= $F_{επ}$(t) και των δυνάμεων των ελατηρίων $F_{ελ1}$= $F_{ελ1}$(t) και $F_{ελ2}$= $F_{ελ2}$(t)

v) Να υπολογίστε το έργο W_F της δύναμης $\vec{F}$ που ασκούμε για να μετακινήσουμε το σώμα κατά d=0,05m i) πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας του και ii) κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Δίνεται g=10m/s^2. Να θεωρήσετε ως θετική φορά για την απομάκρυνση της α.α.τ την αντίθετη του βάρους του σώματος.

Απάντηση:



i) Η δύναμη $F_{ελ1}$ που ασκεί το ελατήριο σταθεράς k_1 στο σώμα είναι: $F_{ελ1}= k_1\,\Delta l_1 \Rightarrow$

$F_{ελ1}=100\cdot 0{,}07 \Rightarrow F_{ελ1}=7N$ (1) και είναι κατά μέτρο μικρότερη από το βάρος του σώματος W=mg=10N (2). Άρα η δύναμη που ασκεί το ελατήριο σταθεράς k_2 πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω για να ισορροπεί το σώμα, δηλαδή το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος έχουμε:

$$\vec{F}_{ελ1}+\vec{W}+\vec{F}_{ελ2}=0 \Rightarrow k_1\Delta l_1 - W + F_{ελ2}=0 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} F_{ελ2}=3N \Rightarrow k_2\cdot \Delta l_2 = 3 \Rightarrow k_2 = 300N\ (3).$$

ii) Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος (O): $k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2 = W\ (4).\ (3).$

Εκτρέπουμε το σώμα κατά x προς την κατεύθυνση του βάρους του και στη θέση (Γ) το αφήνουμε ελεύθερο:

$$\Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = \vec{F}'_{\varepsilon\lambda 1} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda 2} + \vec{W} \Rightarrow \Sigma F_{(\Gamma)} = -k_1(\Delta l_1 + x) - k_2(\Delta l_2 + x) + W \Rightarrow$$

$$\Sigma F_{(\Gamma)} = -k_1\Delta l_1 - k_1 x - k_2\Delta l_2 - k_2 x + W$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \Sigma F_{(\Gamma)} = -(k_1 + k_2)x$$

Το σύστημα εκτελεί α.α.τ με σταθερά ταλάντωσης $D= K_1+ K_2$.

Σημείωση:

Στη διαδικασία που ακολουθήθηκε για να αποδείξουμε ότι το σώμα εκτελεί α.α.τ ως θετική φορά θεωρήθηκε η φορά της εκτροπής του σώματος και όχι η φορά που ορίζεται ως θετική για την απομάκρυνση του σώματος. Η επιλογή φοράς μπορεί να γίνει αυθαίρετα και δεν είναι απαραίτητο να οριστεί αν χρησιμοποιήσουμε τις διανυσματικές εκφράσεις των δυνάμεων:

ΘΕΣΗ (Ο): $\vec{F}_{\varepsilon\lambda 1} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda 2} + \vec{W} = 0 \Rightarrow -k_1\vec{\Delta l_1} - k_2\vec{\Delta l_2} + \vec{W} = 0$ (4α)

ΘΕΣΗ (Γ): $\Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = \vec{F}'_{\varepsilon\lambda 1} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda 2} - \vec{W} \Rightarrow \Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = -k_1(\vec{\Delta l_1} + \vec{x}) - k_2(\vec{\Delta l_2} + \vec{x}) - \vec{W} \Rightarrow$

$$\Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = -k_1\vec{\Delta l_1} - k_1\vec{x} - k_2\vec{\Delta l_2} - k_2\vec{x} - \vec{W} \overset{(4\alpha)}{\Rightarrow} \Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = -k_1\vec{x} - k_2\vec{x} \Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = -(k_1 + k_2)\vec{x} \Rightarrow \Sigma\vec{F}_{(\Gamma)} = -D\vec{x}$$ με $D= k_1+ k_2$.

Η περίοδος της α.α.τ είναι: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}} \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}} \overset{(3)}{\Rightarrow} f_1 = \dfrac{10}{\pi} Hz \quad (5).$

iii) Η θέση (Δ) στην οποία αφήνουμε το σώμα ελεύθερο είναι ακραία θέση της α.α.τ που θα εκτελέσει: $y_{(\Delta)}=+d=+A=0{,}05m$ (6) (διότι $\upsilon_{(\Delta)}=0$).

Η γωνιακή συχνότητα της α.α.τ είναι $\omega = 2\pi f \overset{(5)}{\Rightarrow} \omega = 20 rad/s \quad (7).$ Η εξίσωση της απομάκρυνσης της α.α.τ είναι:

$$y=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \underset{(7)}{\overset{(6)}{\Rightarrow}} y = 0{,}05\,\eta\mu(20t+\varphi_0) \underset{(\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\,\Delta)}{\overset{t=0}{\Rightarrow}} +0{,}05 = 0{,}05\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\eta\mu\varphi_0 = 1\\ 0 \le \varphi_0 < 2\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad.$$

Άρα $y=0{,}05\eta\mu\left(20t + \dfrac{\pi}{2}\right) \quad (S.I)\ (8).$

Η έκφραση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο είναι: $F_{\varepsilon\pi}=-Dy \Rightarrow F_{\varepsilon\pi}=-(k_1+k_2)y \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$F_{\varepsilon\pi}=-20\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I).$$

Οι αριθμητικές τιμές των δυνάμεων των ελατηρίων σε συνάρτηση με το χρόνο υπολογίζονται ως εξής:

1ος τρόπος

Στην τυχαία θέση (Ζ) η διανυσματική έκφραση της παραμόρφωσης του ελατηρίου σταθεράς k_1 είναι:

$$\vec{\Delta l_1}+\vec{y} \text{ άρα } \vec{F}_{ελ1}=-k_1(\vec{\Delta l_1}+\vec{y}) \Rightarrow \vec{F}_{ελ1}=-k_1\vec{\Delta l_1}-k_1\vec{y},$$

χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη δοθείσα θετική φορά. Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές (αλγεβρικές) τιμές των διανυσμάτων:

$$F_{ελ1}=-k_1\Delta l_1-k_1y \Rightarrow F_{ελ1}=\text{-100(-0,07)-100y} \overset{(8)}{\Rightarrow} F_{ελ1}=7\text{- 5ημ}\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)\ (S.I).$$

$$\text{Αντίστοιχα: } \vec{F}_{ελ2}=-k_2(\vec{y}+\vec{\Delta l_2}) \Rightarrow \vec{F}_{ελ2}=-k_2\vec{y}-k_2\vec{\Delta l_2}$$

Για τις αριθμητικές (αλγεβρικές) τιμές των διανυσμάτων έχουμε:

$$F_{ελ2}=-k_2y-k_2\Delta l_2\ F_{ελ2}=-k_2y-k_2\Delta l_2 \overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$F_{ελ2}=-300\cdot 0,05\text{ημ}\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)-300(-0,01) \Rightarrow F_{ελ(2)}=3-15\text{ημ}\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)\ (S.I)$$

Το ερώτημα στον τρόπο αυτό αντιμετωπίσθηκε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ότι το σύστημα εκτελεί α.α.τ .

<u>2ος τρόπος</u>

Όπως έχουμε δείξει στο **β.** ερώτημα το σύστημα εκτελεί α.α.τ.Στην τυχαία θέση (Ζ):

$$\Sigma\vec{F}=-D\vec{y} \Rightarrow \vec{F}_{ελ1}+\vec{F}_{ελ2}+\vec{W}=-D\vec{y} \Rightarrow \vec{F}_{ελ1}=-D\vec{y}-\vec{W}-\vec{F}_{ελ2} \Rightarrow \vec{F}_{ελ1}=-D\vec{y}-\vec{W}+k_2(\vec{y}+\vec{\Delta l_2})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ελ1}=-D\vec{y}-\vec{W}+k_2\vec{y}+k_2\vec{\Delta l_2}$$

αντικαθιστούμε τις αριθμητικές (αλγεβρικές) τιμές των διανυσμάτων:

$$F_{ελ1}=-(k_1+k_2)y-W+k_2y+k_2\Delta l_2 \overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$F_{ελ1}=-20\text{ημ}(20t+\frac{\pi}{2})-(-10)+300\cdot 0,05\text{ημ}(20t+\frac{\pi}{2})+300(-0,01) \Rightarrow$$

$$\text{Αντίστοιχα από τη σχέση: } \vec{F}_{ελ1}+\vec{F}_{ελ2}+\vec{W}=-D\vec{y} \Rightarrow \vec{F}_{ελ2}=-D\vec{y}-\vec{F}_{ελ1}-\vec{W} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{ελ2}=-D\vec{y}+k_1(\vec{\Delta l_1}+\vec{y})-\vec{W} \Rightarrow \vec{F}_{ελ2}=-D\vec{y}+k_1\vec{\Delta l_1}+k_1\vec{y}-\vec{W}.$$

Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές (αλγεβρικές) τιμές των διανυσμάτων:

$$F_{ελ2}=-Dy-W+k_1\Delta l_1+k_1y \overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$F_{ελ2}=-20\text{ημ}(20t+\frac{\pi}{2})-(-10)+100(-0,07)+100\cdot 0,05\text{ημ}(20t+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow F_{ελ2}=3-15\text{ημ}(20t+\frac{\pi}{2}).$$

iv) 1ος τρόπος

Αντιμετωπίζουμε το ερώτημα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ότι το σύστημα εκτελεί α.α.τ όταν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο.

α) Για τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση αρχικής ισορροπίας του (Γ) στη θέση (Δ) εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας (Θ.Ε.Ε): $\Sigma W_F=\Delta K \Rightarrow W_F+W_W+W_{F_{ελ1}}+W_{F_{ελ2}}=K_{(\Delta)}-K_{(O)} \Rightarrow$

$$W_{F_1} - Wd + \frac{1}{2}k_1\Delta l_1^2 - \frac{1}{2}k_1(\Delta l_1 - d)^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta l_2^2 - \frac{1}{2}k_2(d - \Delta l_2)^2 = 0 - 0 \Rightarrow$$

$$W_{F_1} - Wd - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 + (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d = 0 \Rightarrow W_{F_1} = Wd + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 - (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d \Rightarrow$$

$$W_{F_1} = (W - k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2)d + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 \overset{(4)}{\Rightarrow} W_{F_1} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} W_{F_1} = 0,5J$$

β) Αντίστοιχα για τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση αρχικής ισορροπίας (Γ) στη θέση (Η) η εφαρμογή του Θ.Ε.Ε δίνει: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_{F_2} + W_W + W_{F_{\varepsilon\lambda 1}} + W_{F_{\varepsilon\lambda 2}} = K_{(H)} - K_{(O)} \Rightarrow$

$$W_{F_2} + mgd + \frac{1}{2}K_1\Delta l_1^2 - \frac{1}{2}K_1(\Delta l_1 + d)^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_2^2 - \frac{1}{2}K_2(\Delta l_2 + d)^2 = 0 - 0 \Rightarrow$$

$$W_{F_2} + Wd - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 - (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d = 0 \Rightarrow$$

$$W_{F_2} = -Wd + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 + (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d \Rightarrow W_{F_2} = (-W + k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$W_{F_2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} W_{F_2} = 0,5J$$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Η ενέργεια που προσφέρουμε μέσω του έργου W_F της δύναμης $\vec{F}$ είναι η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος.Η θέση στην οποία αφήνουμε το σώμα ελεύθερο και στις δύο περιπτώσεις είναι ακραία θέση της τροχιάς της α.α.τ, άρα d=A=0,05m και W_F=E= ½ $DA^2 \Rightarrow$ W_F= ½ (k_1+k_2) $d^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} W_{F_1} = 0,5J$,δηλαδή το ζητούμενο έργο και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο διότι αποτελεί την ενέργεια ταλάντωσης σε δύο α.α.τ της ίδιας σταθεράς ταλάντωσης $D=k_1+k_2$ και του ίδιου πλάτους d.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.Από τις εκφράσεις του ζητούμενου έργου στις δύο περιπτώσεις :

$W_{F_1} = Wd + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 - (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d$ και $W_{F_2} = -Wd + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 + (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d$ εύκολα προκύπτει ότι τα έργα των συντηρητικών δυνάμεων του βάρους $\vec{W}$ του σώματος και των δυνάμεων $\vec{F}_{\varepsilon\lambda 1}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda 2}$των ελατηρίων αλληλοαναιρούνται λόγω της συνθήκης ισορροπίας W=$k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2$ με αποτέλεσμα το έργο της δύναμης $\vec{F}$ να είναι το ίδιο.Αυτό συμβαίνει διότι στις συντηρητικές δυνάμεις το έργο εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης του σώματος που στην περίπτωση αυτή είναι d ανεξάρτητα από τη φορά της μετατόπισης του σώματος.Η μεταβολή της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας του σώματος και στις δύο περιπτώσεις αναιρεί (είναι αντίθετη) τις μεταβολές των δυναμικών ενεργειών των ελατηρίων και απομένει το έργο της δύναμης $\vec{F}$ που προσδίδει στο σύστημα την ενέργεια ταλάντωσης που χρειάζεται για να εκτελέσει α.α.τ όταν το αφήσουμε ελεύθερο.

2. Ένα συνηθισμένο **λάθος** σε τέτοια ερωτήματα είναι να θεωρούμε ότι το έργο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας των ελατηρίων. Στην περίπτωση **δ.i)** αυτό θα οδηγούσε στο αποτέλεσμα $W_{F_1} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)d^2 - (k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2)d \overset{(3)}{\Rightarrow} W_{F_1} = 0,5 - 0,5 \Rightarrow W_{F_1} = 0$!!!, δηλαδή ότι θα μπορούσε να μετακινηθεί το σώμα χωρίς δαπάνη ενέργειας.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Ξενοφών Στεργιάδης