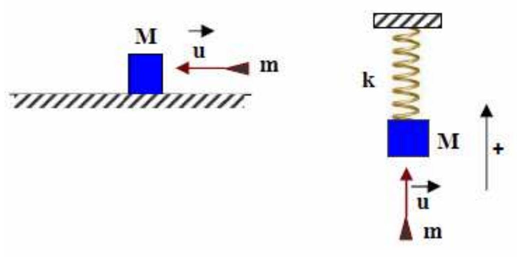
Δυο κρούσεις και μια ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας M, ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας m, κινείται οριζόντια και συγκρούεται κεντρικά πλαστικά με το σώμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και οριζόντιου επίπεδου είναι μ = 0,1 και το συνολικό διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι S = 1,5m.

Η ίδια κρούση, πραγματοποιείται με το σώμα μάζας M, δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου , με το βλήμα να κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου.

Το πάνω άκρο του ελατηρίου, είναι ακλόνητα στερεωμένο.

Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου $x = A\eta\mu(5t+\pi/6)$ SI, θετική φορά προς τα επάνω και D = k.

Αν το κλάσμα της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα ηρεμεί στιγμιαία στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, προς την ολική ενέργεια της ταλάντωσης, ισούται με 4 να υπολογίσετε:

i) Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

ii) Την μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος, κατά την διάρκεια της ταλάντωσης.

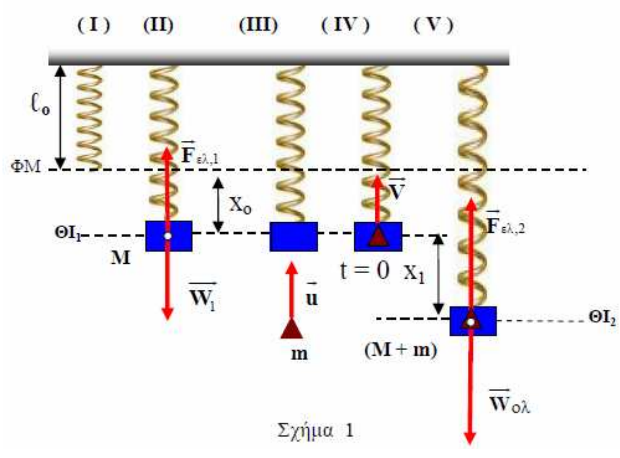
iii) Την τιμή του λόγου m/M.

iv) Την χρονική στιγμή που ξαναπερνά για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα που ταλαντώνεται, από το σημείο που έγινε η κρούση.

v) Το κλάσμα της ενέργειας του βλήματος, τη στιγμή της σύγκρουσης , που μετατράπηκε σε ενέργεια του ταλαντωτή.

Η χρονική διάρκεια των κρούσεων να θεωρηθεί αμελητέα.

Απάντηση



Σχήμα 1

i) Για την κίνηση του συσσωματώματος στο οριζόντιο επίπεδο, με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \mu(m+M)gS \text{ ή}$$

$$V^2 = 2\mu g S \text{ ή } V = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad (1).$$

ii) Από την εξίσωση $x = A\eta\mu(5t+\pi/6)$ για $t = 0$ προκύπτει $x = A/2$.

Δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα απέχει κατά $x_1 = A/2$ (2), από τη θέση ισορροπίας του ($ΘΙ_2$ σχήμα 1) και κινείται με ταχύτητα μέτρου $V = \sqrt{3}$ m/s.

Εφαρμόζουμε τώρα την ΑΔΕ για τον ταλαντωτή κι έχουμε

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2+\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}=\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{και με βάση την (2)}$$

$$(m+M)V^2+(m+M)\omega^2\left(\frac{A}{2}\right)^2=(m+M)\omega^2A^2 \text{ ή}$$

$$V^2+\omega^2\frac{A^2}{4}=\omega^2A^2 \text{ ή } \frac{3\omega^2A^2}{4}=V^2 \text{ ή } 3u_{max}^2=4V^2 \text{ ή } u_{max}^2=\frac{4V^2}{3}$$

και με βάση την (1)

$$u_{max} = 2 \text{ m/s.}$$

iii) Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος μάζας M ($ΘI_1$ στο σχήμα 1) , ισχύει

$$\vec{F}_{ελ,1}+\overrightarrow{w_1}=\vec{0} \text{ ή } F_{ελ,1}-W_1=0 \text{ ή } kx_o=Mg \ (4)$$

Στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ($ΘI_2$ στο σχήμα 1) , ισχύει

$$\vec{F}_{ελ,2}+\overrightarrow{w}_{ολ}=\vec{0} \text{ ή } F_{ελ,2}-W_{ολ}=0 \text{ ή } F_{ελ,2}=W_{ολ} \text{ ή } k(x_o+x_1)=(M+m)g \ (5)$$

Από τις (4), (5) έχουμε

$$\frac{M+m}{m}=\frac{x_1+x_o}{x_o} \quad (6)$$

Αλλά $\frac{U_{max,ελ}}{E_{ολ,ταλ}}=4$ ή $\frac{1}{2}k(x_o+x_1+A)^2=4\cdot\frac{1}{2}kA^2$ ή $(x_o+x_1+A)=2A$ ή $(x_o+x_1)=A$

αλλά με βάση την (2) είναι $x_1= A/2$ άρα $x_o +A/2 = A$ οπότε $x_o = A/2$ δηλαδή $x_1 = x_o$ (7)

Έτσι η (6) με βάση την (7) γράφεται $\frac{M+m}{m}=\frac{x_o+x_o}{x_o}=2$ και $M+m = 2m$ ή $M = m$

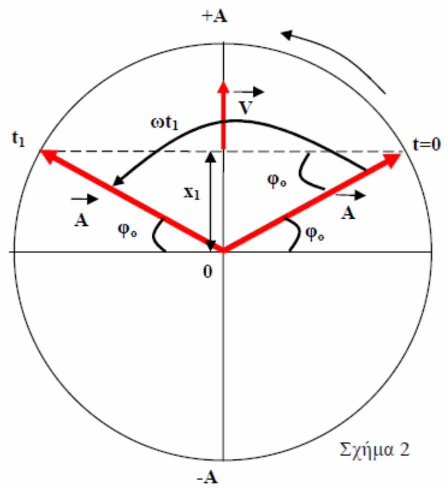
άρα

$$\frac{m}{M}=1 \quad (8)$$

iv) Όπως φαίνεται στον βοηθητικό κύκλο του σχήματος 2, τη χρονική στιγμή $t = t_1$ θα είναι $\omega t_1 = \pi - 2\varphi_o$ ή $\omega t_1 = 2\pi/3$

άρα

$$t_1 = (2\pi/15)\ s$$



Σχήμα 2

v) Θέτουμε λ την τιμή του κλάσματος κι έχουμε:

$$λ=\frac{\frac{1}{2}(m+M)u_{max}^2}{\frac{1}{2}mu^2} \quad \text{και με βάση την (8)}$$

$$λ=\frac{2mu_{max}^2}{mu^2} \text{ ή } λ=\frac{2u_{max}^2}{u^2} \quad (9)$$

Αλλά για την κρούση, με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε

$$m\vec{u}=(m+M)\vec{V} \text{ ή με βάση την (8) } mu=2mV \text{ ή } u=2V \quad (10)$$

Τελικά η (9) με βάση την (10) γράφεται

$$\lambda = \frac{2u_{max}^2}{4V^2} = \frac{2\cdot 4}{4\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης