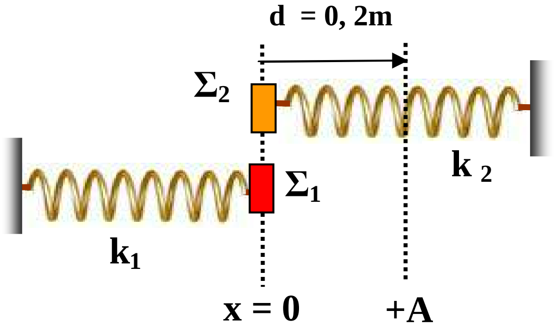
Δυο ταλαντώσεις που ξεκινούν ταυτόχρονα



Τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ του σχήματος , έχουν μάζες m_1 = 1 kg , m_2 = 4 kg αντίστοιχα, και ηρεμούν σε ισορροπία πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα , είναι δεμένα στα άκρα δυο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές K_1 = K_2 =100 N/m και παράλληλους άξονες που βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.

Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι ακλόνητα.

Μετατοπίζουμε τα σώματα κατά μήκος της διεύθυνσης των ελατηρίων , προς την ίδια κατεύθυνση κατά d = 0,2 m , και την χρονική στιγμή t = 0, τα αφήνουμε ελεύθερα ταυτόχρονα και τα δύο από την ηρεμία.

Να υπολογίσετε:

i) Τη χρονική στιγμή $t_σ$, τα δυο σώματα θα συναντηθούν στη θέση x = +A για πρώτη φορά.

ii) Το πλήθος των ταλαντώσεων που θα έχει εκτελέσει κάθε σώμα από t = 0 μέχρι t = $t_σ$.

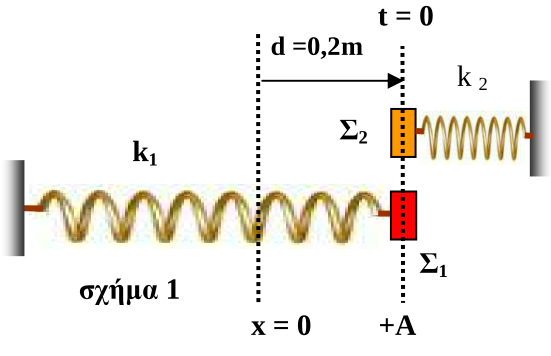
iii) Την περίοδο του φαινόμενου, της συνάντησης των δυο σωμάτων στη θέση x = +A.

iv) Τις συναρτήσεις απομάκρυνσης – χρόνου για τις ταλαντώσεις που εκτελούν τα σώματα , με θετική τη φορά της αρχικής εκτροπής από τη θέση ισορροπίας , και να τις παραστήσετε γραφικά σε κοινό διάγραμμα.

v) Πόσες φορές πριν τη χρονική στιγμή $t_σ$ έχουν συναντηθεί και σε ποιες θέσεις της τροχιάς τους έχει συμβεί αυτό.

vi) Πόσες φορές θα συναντιούνται σε κάθε ταλάντωση του $Σ_1$, πόσες σε κάθε ταλάντωση του $Σ_2$, και σε ποιες θέσεις.

Απάντηση



σχήμα 1

i) Το Σ_1 επιστρέφει στη θέση χ = +Α κατά τις χρονικές στιγμές

$t_1 = T_1$, $t_2 = 2T_1$, $t_3 = 3T_1$, $t_4 = 4T_1$, ... όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσης που συμμετέχει.

και το Σ_2 κατά τις χρονικές στιγμές

$t_1' = T_2$, $t_2' = 2T_2$, $t_3' = 3T_2$, $t_4' = 4T_2$, ... όπου T_2 η περίοδος της ταλάντωσης που συμμετέχει.

Όμως η περίοδος της ταλάντωσης του Σ_1 είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$ ή $T_1 = \frac{\pi}{5}$ s. (1)

ενώ του Σ_2 είναι $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$ ή $T_2 = \frac{2\pi}{5}$ s. (2)

$$\text{Άρα}\ \ t_1 = \frac{\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_2 = \frac{2\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_3 = \frac{3\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_4 = \frac{4\pi}{5}\text{s},....\ \ (3)\ \text{και}$$

$$t_1' = \frac{2\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_2' = \frac{4\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_3' = \frac{6\pi}{5}\text{s}\ ,\ t_4' = \frac{8\pi}{5}\text{s}\ ,....\ (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι τα σώματα θα συναντηθούν για πρώτη φορά στη θέση χ = +Α τη χρονική στιγμή $t_\sigma = \frac{2\pi}{5}$s .

ii) Το πλήθος των ταλαντώσεων που θα έχει εκτελέσει κάθε κινητό είναι

$$\text{για το } \Sigma_1:\ N_1 = \frac{t_\sigma}{T_1} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}} = 2\ \text{ταλαντώσεις}$$

$$\text{για το } \Sigma_2:\ N_2 = \frac{t_\sigma}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{5}} = 1\ \text{ταλάντωση}$$

iii) Από τις (4) και (5) παρατηρούμε ότι τα σώματα συναντιόνται στη θέση χ = +Α κάθε χρονική στιγμή που το Σ_2 φτάνει στο σημείο αυτό.

Άρα η περίοδος του φαινόμενου της συνάντησής τους εκεί είναι $T = T_2 = \frac{2\pi}{5}$s .

iv) Οι απομακρύνσεις των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 από τη θέση ισορροπίας τους είναι αντίστοιχα

$$x_1 = A_1\eta\mu\left(\omega_1 t + \varphi_{o1}\right)\ \text{και}\ x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega_2 t + \varphi_{o2}\right)\ \text{όπου}\ A_1 = A_2 = 0{,}2\ \text{m}\ ,$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \xrightarrow{(1)} \omega_1 = 10\ \text{rad/s}\ \ \text{και}\ \ \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \xrightarrow{(2)} \omega_2 = 5\ \text{rad/s}$$

Εξ' άλλου την χρονική στιγμή t = 0 τα δυο σώματα ξεκινούν από τη θέση $x_1 = x_2 = +A$ άρα

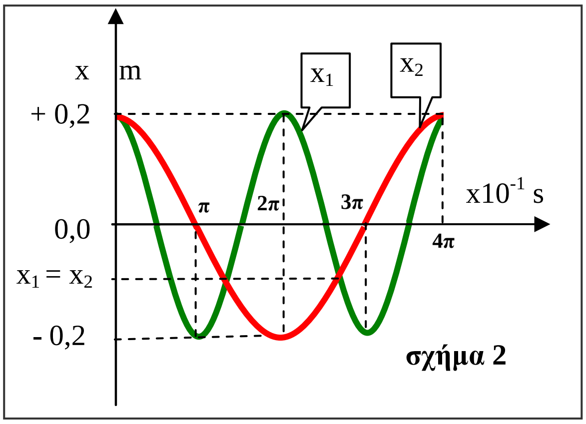
$$\eta\mu\varphi_{o1} = \eta\mu\varphi_{o2} = +1\ \text{ή}\ \varphi_{o1} = \varphi_{o2} = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 \le \varphi_o < 2\pi} \varphi_{o1} = \varphi_{o2} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Οπότε

$$\mathbf{x_1 = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{οι μονάδες στο SI (5) και}}$$

$$\mathbf{x_2 = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)}\ \textbf{οι μονάδες στο SI (6)}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των (5) και (6) φαίνονται στο σχήμα 2.



σχήμα 2

ν) Στο σχήμα 2, παρατηρούμε ότι, οι καμπύλες τέμνονται δυο φορές πριν τη χρονική στιγμή

$$t_\sigma = T_2 = 4\pi\cdot 10^{-1}\ s\ .$$

Τα σημεία τομής αντιστοιχούν σε ίσες στιγμιαίες απομακρύνσεις , άρα τα σώματα συναντιούνται δυο φορές πριν τη χρονική στιγμή t_σ .

Κάθε φορά που συναντιούνται θα είναι $x_1 = x_2$ ή με βάση τις (5) και (6) συν10t = συν5t άρα

$$10t = 2K\pi + 5t \text{ ή } 10t = 2K\pi - 5t \text{ άρα } 10t - 5t = 2K\pi \text{ ή } 10t + 5t = 2K\pi \text{ άρα}$$

$$5t = 2K\pi \text{ ή } 15t = 2K\pi\ ,\ K = 0,1,2,3,4,.... \text{ οπότε } t = \frac{2K\pi}{5} = KT_2\ \ (7) \text{ ή } t = \frac{2K\pi}{15}\ \ (8)$$

Είναι φανερό ότι η (7) μας δίνει όλες τις χρονικές στιγμές που τα σώματα συναντιούνται στη θέση χ = +Α ενώ η (8), μας δίνει όλες τις χρονικές στιγμές που συναντιούνται μετά που θα αρχίσουν να ταλαντώνονται. Από την (8) λοιπόν έχομε ότι

Για Κ = 0 είναι t = 0

Για Κ = 1 είναι $t = \frac{2\pi}{15}s < T_2$

Για Κ =2 είναι $t = \frac{4\pi}{15}s < T_2$

Για Κ = 3 είναι $t = \frac{6\pi}{15}s = \frac{2\pi}{5}s = T_2$

Για Κ = 4 είναι $t = \frac{8\pi}{15}s > T_2$

Άρα θα συναντηθούν στις χρονικές στιγμές $t = \frac{2\pi}{15}s$ και $t = \frac{4\pi}{15}s$ στις θέσεις

$$x_1 = 0{,}2\eta\mu\left(5\cdot\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right)m = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)m = -\ 0{,}1\ m \quad \text{και}$$

$$x_1 = 0,2\eta\mu\left(5\cdot\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{2}\right)m = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right)m = -\ 0,1\ m\ .$$

vi) Είναι φανερό ότι , επειδή η μορφή που υπάρχει στο διάγραμμα του σχήματος 2, επαναλαμβάνεται α- κριβώς όπως είναι , ύστερα από κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του T_2 , τα σώματα θα συναντιούνται πάντα

α. μια φορά σε κάθε ταλάντωση του Σ_1 στη θέση $x_1 = x_2 = -\ 0,1m$ και

β. τρεις φορές σε κάθε ταλάντωση του Σ_2 δηλαδή, δυο φορές στη θέση $x_1 = x_2 = -\ 0,1\ m$ και μια φορά στη θέση $x_1 = x_2 = +0,2\ m$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης