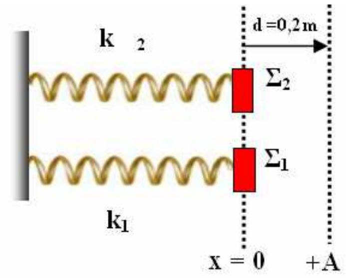
Δυο ταλαντώσεις χρονικά διαφέρουσες

Τα σώματα Σ1 , Σ2 του σχήματος, έχουν μάζες $m_1 = 1kg$, $m_2 = 4kg$ αντίστοιχα και ηρεμούν σε ισορροπία πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα αυτά , είναι δεμένα στα άκρα δυο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = k_2 = 100$ N/m και παράλληλους άξονες, που βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι ακλόνητα. Μετατοπίζουμε τα σώματα κατά μήκος της διεύθυνσης των ελατηρίων , προς την ίδια κατεύθυνση κατά d = 0,2 m , και την χρονική στιγμή t = 0, αφήνουμε ελεύθερο το Σ1.



Να βρείτε και να παραστείσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου για τις ταλαντώσεις των δυο σωμάτων, αν το σώμα Σ2 αφήνετε ελεύθερο τη χρονική στιγμή που το Σ1 :

i) περνά για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του
ii) σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά
iii) επιστρέφει στη θέση x = +A για τρίτη φορά

Απάντηση

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \text{ ή } T_1 = \frac{\pi}{5}\ s = 2\pi\cdot 10^{-1}\ s. \quad (1)$$

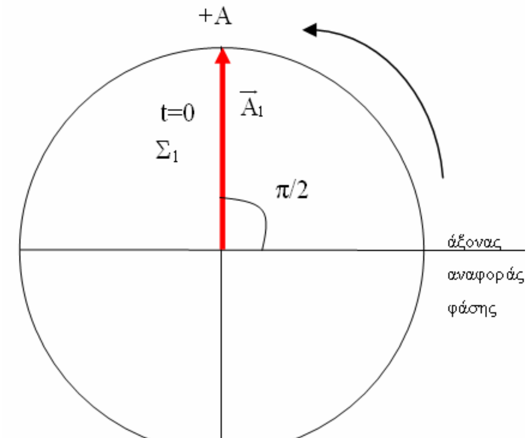
ενώ του $Σ_2$ είναι

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \text{ ή } T_2 = \frac{2\pi}{5}\ s = 4\pi\cdot 10^{-1} s. \quad (2)$$

Η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ είναι $x_1 = A_1 ημ(\omega_1 t + \varphi_{o1})$,

όπου $A_1 = d = 0,2$ m και $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \xrightarrow{1} \omega_1 = 10$ rad/s

Εξ' άλλου την t = 0 είναι $x_1 = +A_1$, άρα το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_1$ βρίσκεται τότε στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 1 και $\varphi_{o1} = \frac{\pi}{2}$ rad .



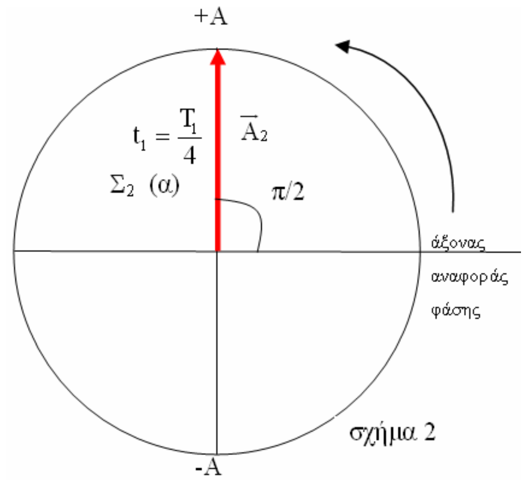
σχήμα 1

Κατά συνέπεια $x_1 = 0\ 2\cdot ημ\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI (3)

i) Επειδή το σώμα $Σ_1$ ξεκινά να ταλαντώνεται από ακραία θέση, περνά για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_1}{4}$ ή με βάση την (1):

$$t_1 = \frac{\pi}{20} s = \frac{\pi}{2}\cdot 10^{-1} s .$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του $Σ_2$ είναι



σχήμα 2

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \xrightarrow{(2)} \omega_2 = 5\ \mathrm{rad/s}\ ,$$

κι επειδή ξεκινά και αυτό από ακραία θετική θέση το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_2$ του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το πλάτος της απομάκρυνσης του Σ_2 δηλαδή $|\vec{A}_2| = d$, βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 2.

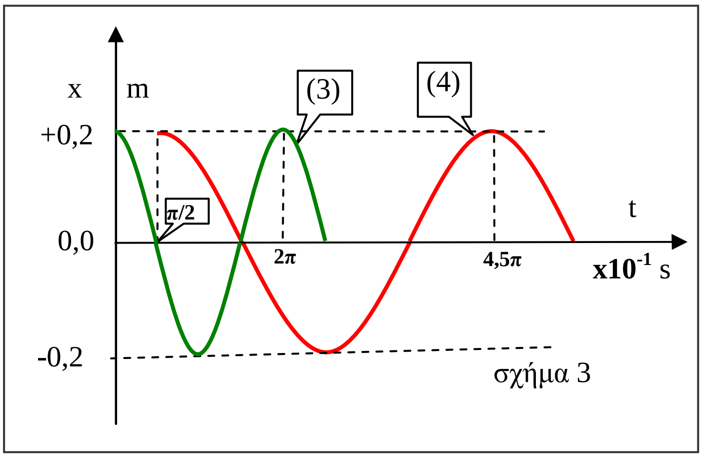
Έτσι η απομάκρυνσή του σώματος Σ_2 είναι

$$x_2 = A_2 \eta\mu\left(\omega_2(t - t_1) + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{SI}\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0{,}2\eta\mu\left(5\left(t - \frac{\pi}{20}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{SI},\ t \geq \frac{\pi}{20}\mathrm{s}\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{SI}\ ,\ t \geq \frac{\pi}{20}\mathrm{s}\quad (4)$$

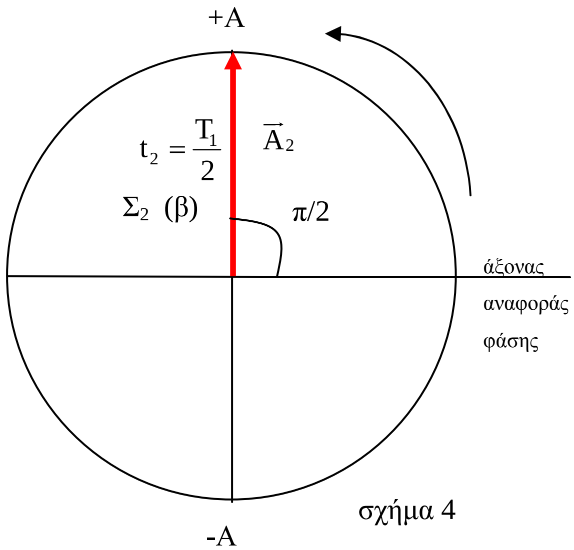
Η γραφική παράσταση των (3) και (4) φαίνεται στο σχήμα 3.



σχήμα 3

ii) Το σώμα Σ_1 σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά στην άλλη ακραία θέση της τροχιάς του, στην x_1=-A τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T_1}{2}$ ή με βάση την (1) $t_2 = \pi \cdot 10^{-1}\mathrm{s}$.

Το σώμα Σ_2 ξεκινά όπως και στο προηγούμενο ερώτημα , από ακραία θετική θέση άρα το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_2$ βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_2 στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 4. Κατά συνέπεια η απομάκρυνσή του Σ_2 στην περίπτωση αυτή είναι



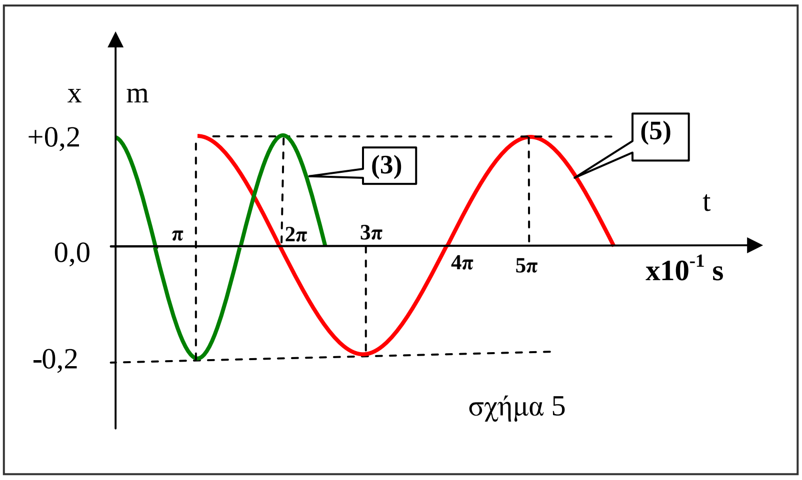
σχήμα 4

$$x_2 = A_2 \eta\mu\left(\omega_2(t - t_2) + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{SI}\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu\left(5\left(t-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\ SI\ ,\ t \ge \pi \cdot 10^{-1} s\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu 5t,\ SI\ ,\ t \ge \pi \cdot 10^{-1}\ s \quad (5)$$

Η γραφική παράσταση των (3) και (5) φαίνεται στο σχήμα 5.

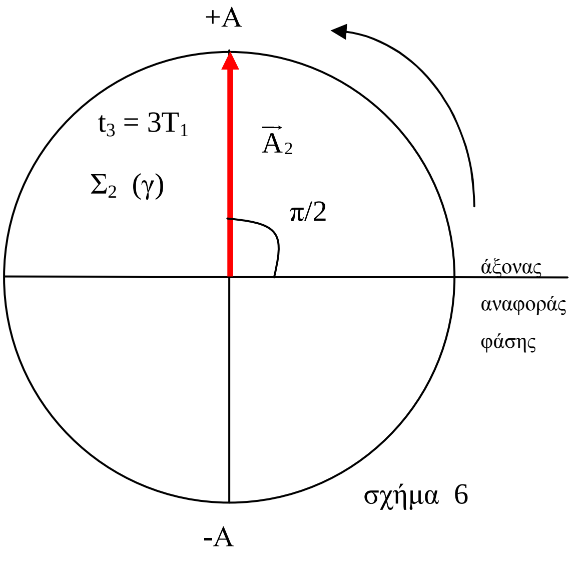


σχήμα 5

iii) Το Σ_1 επιστρέφει στη θέση x_1 = +A για τρίτη φορά, τη χρονική στιγμή $t_3 = 3T_1$ ή με βάση την (1) την $t_3 = 6\pi \cdot 10^{-1} s$.

Το Σ_2 ξεκινά πάλι από ακραία θετική θέση άρα το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_2$ βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_3 στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 6.

Έτσι η απομάκρυνσή του σώματος Σ_2 στην περίπτωση αυτή είναι



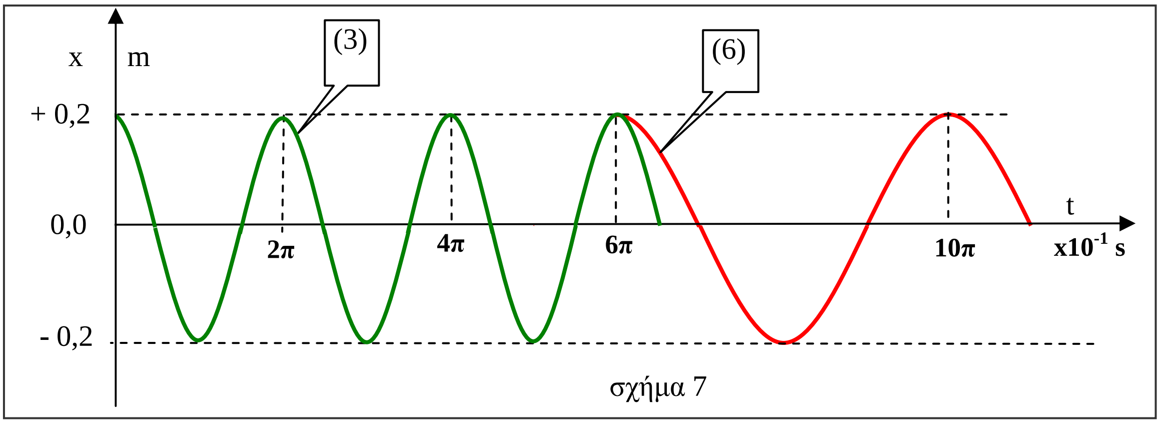
σχήμα 6

$$x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega_2(\ t-t_3\ )\ +\ \frac{\pi}{2}\right)\ SI\ \ \acute{\eta}\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu\left(5\left(t-\frac{3\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\ SI\ ,\ t \ge 6\pi \cdot 10^{-1}\ \ \acute{\eta}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu\left(5t-\frac{5\pi}{2}\right)\ SI\ ,\ \ t\ \ge\ 6\pi \cdot 10^{-1} s \quad (6)$$

Η γραφική παράσταση των (3) και (6) φαίνεται στο σχήμα 7.



σχήμα 7

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης