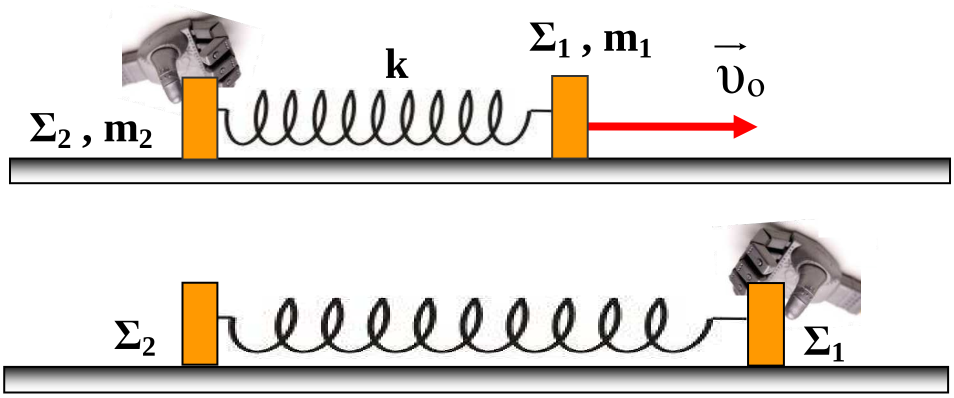
Ελατήριο ανάμεσα σε δυο σώματα και δυο διαδοχικές ταλαντώσεις



Το οριζόντιο ελατήριο του σχήματος σταθεράς $k = 200$ N/m, έχει στα δυο του άκρα δεμένα δυο σώματα Σ_1, Σ_2 που έχουν μάζες $m_1 = 0{,}32$ kg και $m_2 = 1{,}28$ kg αντίστοιχα.

Τα σώματα αυτά, που μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, αρχικά ηρεμούν με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος και, με το χέρι ενός ρομπότ, να κρατά ακίνητο το Σ_2. Την χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε το Σ_1 με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 10$ m / s στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου έτσι ώστε να απομακρύνεται από το Σ_2 όπως δείχνει το σχήμα.

Την χρονική στιγμή $t = T_1/4$, όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος όταν κινείται το Σ_1 , αφήνεται ελεύθερο το Σ_2, και κρατείται από το ρομπότ μόνιμα ακίνητο το Σ_1.

Να υπολογίσετε

i) Το διάστημα S_2 που θα διανύσει το Σ_2 από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο , μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά.

ii) Το λόγο των μέγιστων ταχυτήτων $\upsilon_{1max} / \upsilon_{2max}$, των σωμάτων Σ_1 , Σ_2.

iii) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του κάθε σώματος αμέσως μετά την ελευθέρωση του Σ_2.

iv) Την συνάρτηση θέσης – χρόνου $x = f(t)$, του Σ_2 με $x = 0$ το σημείο στο οποίο αφήνεται ελεύθερο το Σ_2 και θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_o}$ που φαίνεται στο σχήμα.

Να παρατήσετε γραφικά την συνάρτηση αυτή.

v) Τη συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου $\upsilon = f(t)$, του Σ_2 , και να την παραστείσετε γραφικά.

Απάντηση

i) Το σώμα Σ_1, τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του, άρα τη χρονική στιγμή $t = T_1/4$ θα βρίσκεται σε ακραία θέση ακίνητο στιγμιαία. Στη συνέχεια κρατείται ακλόνητο.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας κι έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \ \text{ ή } \ A_1 = \upsilon_o\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \text{ή} \quad A_1 = 0{,}4 \text{ m } (1)$$

Το σώμα Σ_2 αρχικά ηρεμεί άρα, ξεκινά από ακραία θέση και η ενέργεια που είναι αποθηκεμένη στο ελατήριο τότε, είναι ίση με την ενέργεια ταλάντωσής του.

$$\text{Δηλαδή } \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \text{ άρα } A_1 = A_2 = 0{,}4\text{ m } (2)$$

Έτσι το διάστημα που θα διανύσει το Σ_2 από το σημείο που ξεκίνησε να κινείται μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά είναι

$$\mathbf{S_2 = 2A_2 = 0{,}8\ m}.$$

ii) Είναι

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1max}^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \\ \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2max}^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \\ A_1 = A_2 \end{array}\right\} \text{ άρα } \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1max}^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2max}^2$$

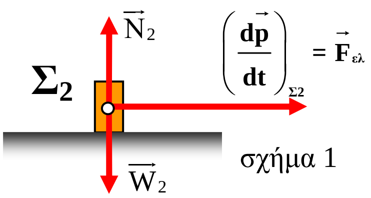
$$\text{ή } \frac{\boldsymbol{\upsilon_{1max}}}{\boldsymbol{\upsilon_{2max}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1}}} = \mathbf{2}$$

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ολ}$

Αμέσως μετά την ελευθέρωση του Σ_2 :

α. Το Σ_1 ισορροπεί σε ηρεμία, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι ίση με μηδέν και

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\Sigma1} = \vec{0}$$

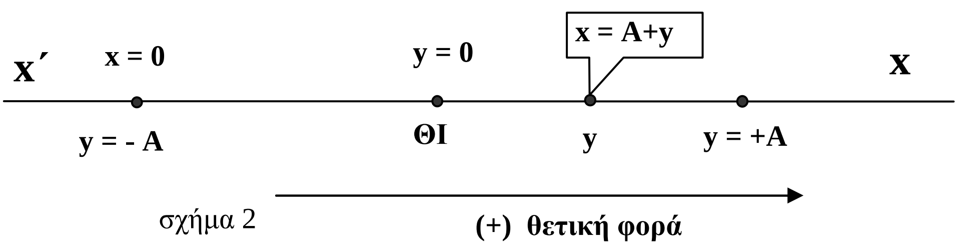


σχήμα 1

β. Το Σ_2 , στην κατακόρυφη διεύθυνση ισορροπεί με την επίδραση του βάρους $\vec{W}_2$ του και της κατακόρυφης αντίδρασης του λείου επιπέδου $\vec{N}_2$, ενώ στην οριζόντια διεύθυνση δέχεται μόνο τη δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

$$\text{Άρα } \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\Sigma2} = \vec{F}_{ελ} \text{ ή } \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\Sigma2} = kA_2 \xrightarrow{(2)} \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\Sigma2} = 80\text{ N}$$

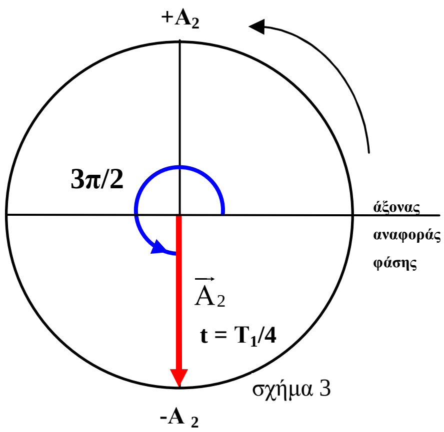
iv) Έστω y η αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας του όπως φαίνεται στο σχήμα 2 .



σχήμα 2

Κάθε χρονική στιγμή θα είναι $x = A + y$ όπου $y = A_2 \eta\mu\left[\omega_2 (t - \frac{T_1}{4}) + \varphi_{o2}\right]$, με $t = \frac{T_1}{4} + \Delta t$ (3) όπου Δt η χρονική διάρκεια της κίνησης του Σ_2.

Όμως από $t = 0$ μέχρι $t = T_1/4$ το Σ_2 παραμένει ακίνητο και αμέσως μετά, αρχίζει να ταλαντώνεται από τη θέση $-A_2$ (σύμφωνα με τη θετική φορά που δόθηκε), κατά συνέπεια το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_2$ που αντιστοιχεί στην ταλάντωσή του, βρίσκεται τότε στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3, και η αρχική φάση της απομάκρυνσής από τη θέση ισορροπίας του είναι $\varphi_{o2} = \frac{3\pi}{2}$ rad .



σχήμα 3

Αλλά $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 8\pi \cdot 10^{-2} s$ άρα $\frac{T_1}{4} = 2\pi \cdot 10^{-2} s$ (4) και

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 16\pi \cdot 10^{-2} s \\ \omega_2 &= \frac{2\pi}{T_2} = 12{,}5 \text{ rad/s} \end{aligned}\right\} (5).$$

Έτσι η (3) με βάση τις (2) , (4) και (5) γράφεται:

$$y = 0{,}4\eta\mu[\ 12{,}5\ (\ t - 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]\ \text{SI},\ \ \text{με}\ \ t = 2\pi \cdot 10^{-2} s + \Delta t .$$

Άρα η θέση του Σ_2 είναι

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x = 0\ \ \text{από}\ \ t = 0\ \ \text{μέχρι}\ \ t = 2\pi \cdot 10^{-2} s\ \ \text{και}} \\ &\mathbf{x = 0{,}4 + 0{,}4\eta\mu[12{,}5\ (\ t - 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]\ SI\ ,\ \ \text{για}\ \ t = 2\pi \cdot 10^{-2} s + \Delta t\ (6)} \end{aligned}\right\} \mathbf{(7)}$$

Θέτουμε στην (6) όπου $t = 2\pi \cdot 10^{-2}$ s κι έχομε

$$x = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu[\ 12{,}5\ (\ 2\pi \cdot 10^{-2} - 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]m = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)m = 0{,}4m - 0{,}4m = 0$$

για $t = 2\pi \cdot 10^{-2} s + \frac{T_2}{4} = (\ 2\pi \cdot 10^{-2} + 4\pi \cdot 10^{-2}\ )s = 6\pi \cdot 10^{-2} s$ έχομε

$$x = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu[\ 12{,}5\ (\ 6\pi \cdot 10^{-2} - 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]m = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu(2\pi)m = 0{,}4m + 0 = 0{,}4m$$

για $t = 2\pi \cdot 10^{-2} s + \frac{T_2}{2} = (\ 2\pi \cdot 10^{-2} + 8\pi \cdot 10^{-2}\ )s = 10\pi \cdot 10^{-2} s$ έχομε

και για $t = 2\pi \cdot 10^{-2} s + T_2 = 2\pi \cdot 10^{-2} s + 16\pi \cdot 10^{-2} s = 18\pi \cdot 10^{-2} s$ έχομε

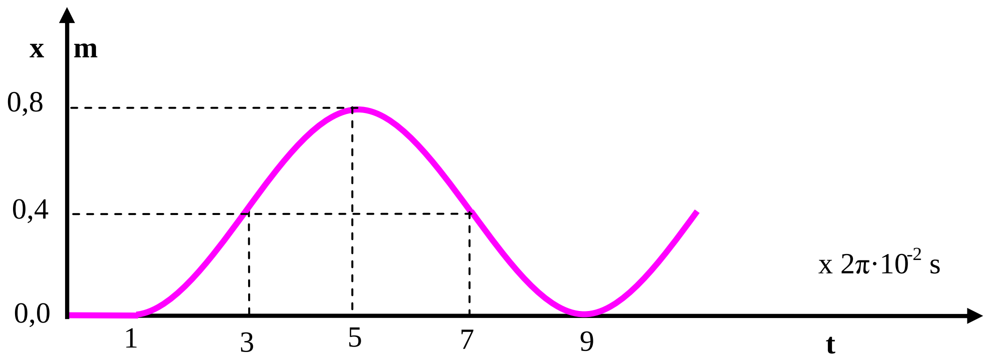
$$x = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu[\ 12{,}5\ (18\pi \cdot 10^{-2} - 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]m = 0{,}4m + 0{,}4\eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right)m = 0{,}4m - 0{,}4m = 0$$

$$x = 0,4\,m + 0,4\etaμ\left[\,12,5\,(\,10\pi\cdot 10^{-2} \;-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]m = 0,4\,m + 0,4\etaμ\left(\frac{5\pi}{2}\right)m = 0,4\,m + 0,4\,m = 0,8\,m$$

για $t = 2\pi\cdot 10^{-2}\,s + \frac{3T_2}{4} = 2\pi\cdot 10^{-2}\,s + 12\pi\cdot 10^{-2}\,s = 14\pi\cdot 10^{-2}\,s$ έχομε

$$x = 0,4\,m + 0,4\etaμ\left[\,12,5\,(\,14\pi\cdot 10^{-2} \;-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]m = 0,4\,m + 0,4\etaμ(3\pi)m = 0,4\,m + 0 = 0,4\,m$$

Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της (7) όπως στο σχήμα 4 που ακολουθεί.



σχήμα 4

v) Από την (6) έχομε ότι

$$\frac{dx}{dt} = 0,4\cdot 12,5\cdot συν\left[\,12,5\,(\,t-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right] \text{ ή}$$

$$υ = 5\cdot συν\left[\,12,5\,(\,t-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]SI$$

Έτσι, η ταχύτητα του $Σ_2$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{υ = 0 \text{ από } t = 0 \text{ μέχρι } t = 2\pi\cdot 10^{-2}s \text{ και}} \\ \boldsymbol{υ = 5\cdot συν\left[\,12,5\,(\,t-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]\; SI,\;\; \text{για } \; t = 2\pi\cdot 10^{-2}s + \Delta t \;\; (8)} \end{array}\right\} \textbf{(9)}$$

Θέτουμε στην (8) όπου $t = 2\pi\cdot 10^{-2}$ s κι έχομε

$$υ = 5συν\left[\,12,5\,(\,2\pi\cdot 10^{-2} \;-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]\frac{m}{s} = 5συν\left(\frac{3\pi}{2}\right)\frac{m}{s} = 0$$

για $t = 2\pi\cdot 10^{-2}\,s + \frac{T_2}{4} = 6\pi\cdot 10^{-2}\,s$ έχομε

$$υ = 5συν\left[\,12,5\,(\,6\pi\cdot 10^{-2} \;-2\pi\cdot 10^{-2}\,)\;+\frac{3\pi}{2}\,\right]\frac{m}{s} = 5συν(2\pi)\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$$

για $t = 2\pi \cdot 10^{-2}\,s + \frac{T_2}{2} = 10\pi \cdot 10^{-2}\,s$ έχομε

$$\upsilon = 5\sigma\upsilon\nu[\ 12,5\ (\ 10\pi \cdot 10^{-2}\ -\ 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]\frac{m}{s} = 5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}\right)\frac{m}{s} = 0$$

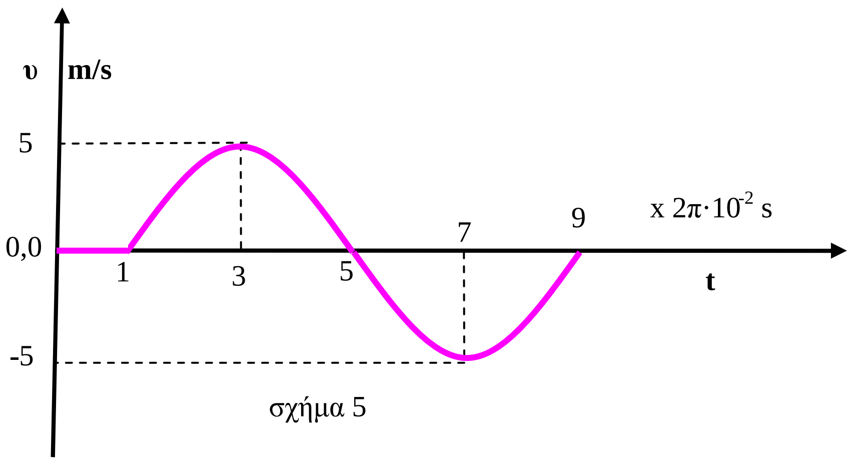
για $t = 2\pi \cdot 10^{-2}\,s + \frac{3T_2}{4} = 14\pi \cdot 10^{-2}\,s$ έχομε

$$\upsilon = 5\sigma\upsilon\nu[\ 12,5\ (\ 14\pi \cdot 10^{-2}\ -\ 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]\frac{m}{s} = 5\sigma\upsilon\nu(3\pi)\frac{m}{s} = -5\frac{m}{s}$$

για $t = 2\pi \cdot 10^{-2}\,s + T_2 = 18\pi \cdot 10^{-2}\,s$ έχομε

$$\upsilon = 5\sigma\upsilon\nu[\ 12,5\ (\ 18\pi \cdot 10^{-2}\ -\ 2\pi \cdot 10^{-2}\ )\ + \frac{3\pi}{2}\ ]\frac{m}{s} = 5\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{m}{s} = 0$$

Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της (9) όπως στο σχήμα 5 που ακολουθεί.



σχήμα 5

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης