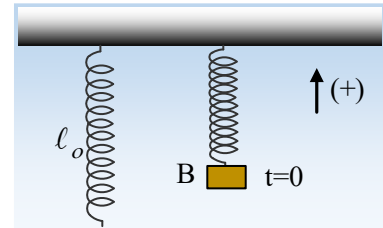


Κάποιες γραφικές παραστάσεις στην ΑΑΤ.

Ένα σώμα μάζας 1kg ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Μετακινούμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι την θέση Β όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell = 0,1\text{m}$ και κάποια στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων ($t=0$), το αφήνουμε να ταλαντωθεί, εκτελώντας ΑΑΤ, με μηδενική αρχική ταχύτητα.



- i) Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος ταλάντωσης.
- ii) Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, να βρεθούν οι εξισώσεις και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:
 - α) της απομάκρυνσης του σώματος, από την θέση ισορροπίας.
 - β) της ταχύτητας του σώματος
 - γ) της δύναμης επαναφοράς.
 - δ) της δύναμης του ελατηρίου.
- iii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση:
 - α) με την απομάκρυνση του σώματος.
 - β) με τον χρόνο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell_1$, οπότε από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{ελ} = w \rightarrow k \cdot \Delta\ell_1 = mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = \frac{1 \cdot 10}{100} \text{m} = 0,1\text{m}$$

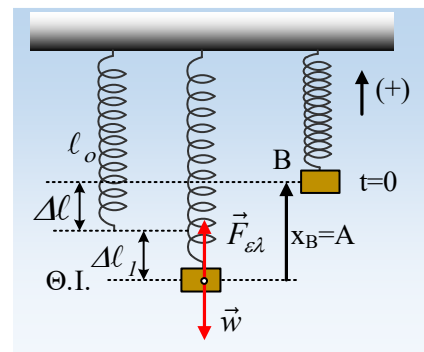
Οπότε το πλάτος ταλάντωσης, ίσο με την απομάκρυνση της ακραίας θέσης Β, θα είναι:

$$A = \Delta\ell_1 + |\Delta\ell| = 0,1\text{m} + 0,1\text{m} = 0,2\text{m}$$

Ενώ για η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\text{s} = 0,2\pi(\text{s}) \approx 0,628\text{s}$$

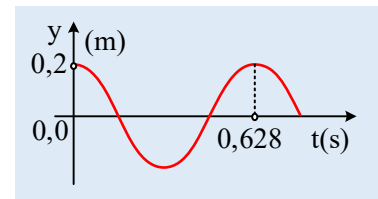
- ii) Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega=2\pi/T=10\text{rad/s}$, ενώ η ταλάντωση ξεκινά από την ακραία θετική απομάκρυνση, οπότε η αρχική απομάκρυνση της απομάκρυνσης θα είναι $\varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.



α) Με βάση τα προηγούμενα η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας, είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

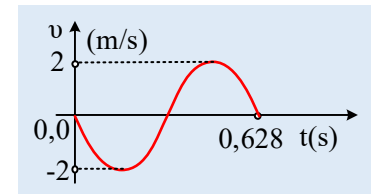


Με αποτέλεσμα η ζητούμενη γραφική παράσταση να έχει την μορφή του διπλανού σχήματος.

β) Η εξίσωση της ταχύτητας θα έχει τη μορφή:

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

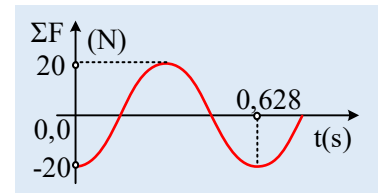
$$v = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$



γ) Για την δύναμη επαναφοράς:

$$\Sigma F = -Dy = -kA \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

$$\Sigma F = -20 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

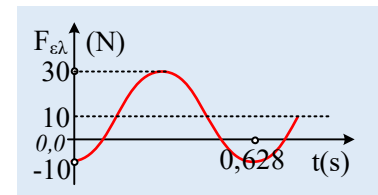


Με μορφή όπως στο διπλανό διάγραμμα.

δ) Για την παραπάνω δύναμη επαναφοράς, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} \Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} - mg \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg + \Sigma F = 10 - 20 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

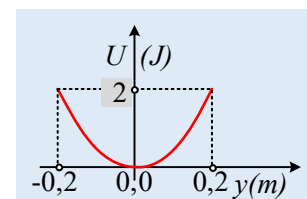


iii) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2$$

α) Στην περίπτωσή μας, όπου $D=k=100\text{N/m}$ και την απομάκρυνση συμβολίσαμε ως y , η εξίσωση γίνεται:

$$U = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} 100 y^2 = 50 y^2 \quad \mu\epsilon -0,2\text{m} \leq y \leq 0,2\text{m}$$

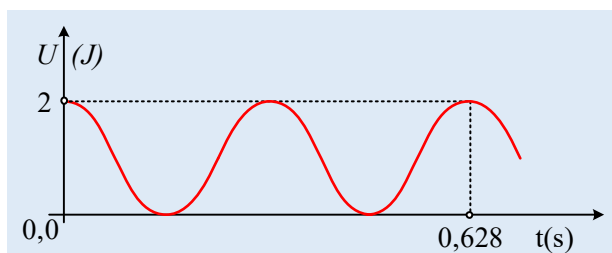


Με γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.

β) Αντικαθιστώντας την εξίσωση της απομάκρυνσης στην παραπάνω εξίσωση τη δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$U = 50 y^2 = 50 \cdot \left(0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \eta\mu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Με γραφική παράσταση αυτή του παρακάτω σχήματος:

**Σχόλια.**

- Στις παραπάνω ερωτήσεις αποφύγαμε να κάνουμε τον οποιαδήποτε τριγωνομετρικό μετασχηματισμό, φοβούμενοι μην κάνουμε τα πράγματα... χειρότερα! Προφανώς αν κάποιος μαθητής χειρίζεται με σχετική ευχέρεια την τριγωνομετρία, μπορεί να καταλήξει σε πιο απλές μορφές των τελικών συναρτήσεων.
- Για μια πιο αναλυτική αντιμετώπιση των γραφικών παραστάσεων που συναντάμε στις ταλαντώσεις, μπορείτε να δείτε την ανάρτηση:

[Γραφικές Παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.](#)

[*dmargaris@gmail.com*](mailto:dmargaris@gmail.com)