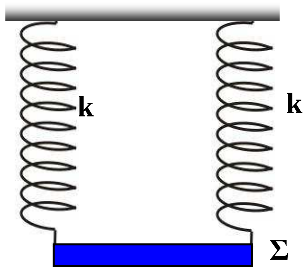
Μια σανίδα αναρτημένη από δυο κατακόρυφα ελατήρια



Μια ομογενής σανίδα Σ μάζας Μ, είναι δεμένη στα κάτω άκρα δυο κατακόρυφων όμοιων ιδανικών ελατηρίων, και ηρεμεί σε ισορροπία όπως φαίνεται στο σχήμα, σε οριζόντια θέση. Τα επάνω άκρα των ελατηρίων είναι ακλόνητα στερεωμένα.

Τοποθετούμε στο μέσον της σανίδας σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 12$ kg, και παρατηρούμε ότι, το σύστημα σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά σε χρόνο $Δt_1 = π/5$ s, αφού διανύσει διάστημα $S_1 = 0{,}6$ m.

Αν αντί του $Σ_1$, τοποθετήσουμε στο ίδιο σημείο της σανίδας, σώμα $Σ_2$ μάζας m_2, το σύστημα σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά, σε χρόνο $Δt_2 = 3π/10$ s.

Να υπολογίσετε :

i) Τις σταθερές των ελατηρίων.

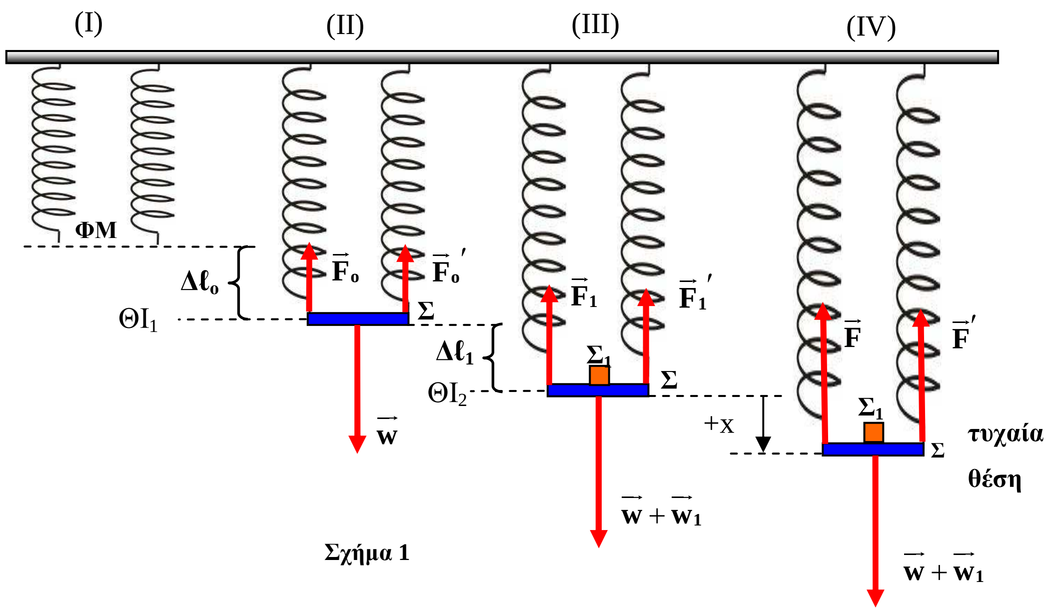
ii) Τη μάζα Μ της σανίδας.

iii) Τη μάζα m_2.

iv) Τη μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του συστήματος, όταν πάνω στη σανίδα είναι τοποθετημένο το σώμα $Σ_2$.

Δίνεται $g = 10$ m/s².

Απάντηση



Σχήμα 1

i) Το σύστημα σανίδα Σ - σώμα $Σ_1$, $(Σ - Σ_1)$, ισορροπεί στην $ΘΙ_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1 εικόνα (ΙΙΙ), ενώ η σανίδα μόνη της ισορροπεί στην $ΘΙ_1$ όπως φαίνεται στην εικόνα (ΙΙ) του ίδιου σχήματος.

Έχουμε λοιπόν :

$$ΘΙ_1 : \vec{w} + \vec{F}_o + \vec{F}_o' = \vec{0} \quad ή$$

$$w = F_o + F_o' \quad ή \quad Mg = k\cdot\Delta\ell_o + k\cdot\Delta\ell_o \quad ή \quad Mg = 2k\cdot\Delta\ell_o \quad (1)$$

$$ΘΙ_2: \ \vec{w} + \vec{w}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_1' = \vec{0} \quad ή \quad (M+m_1)g = 2k\cdot(\Delta\ell_o + \Delta\ell_1) \quad (2)$$

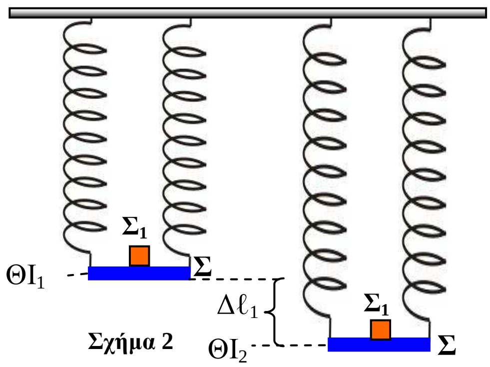
Στην τυχαία θέση (IV) : $\vec{F}_{ολ} = \vec{F} + \vec{F}' + \vec{w} + \vec{w}_1$ ή $F_{ολ} = -2k\cdot(\Delta\ell_o + \Delta\ell_1 + x) + (M+m)g$ (3)

Από την (3) με βάση τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$F_{ολ} = -2k\cdot x \quad ή$$

$$F_{ολ} = -D\cdot x \ ,$$

άρα το σύστημα $\Sigma - \Sigma_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k$ (4) .



Σχήμα 2

Όταν αρχίζει η ταλάντωση αυτή, το σύστημα ηρεμεί στιγμιαία στη $ΘΙ_1$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2, άρα είναι $\Delta\ell_1 = A_1$ (5), όπου A_1 το πλάτος της.

Έτσι, το διάστημα που θα διανύσει η σανίδα μαζί με το σώμα Σ_1 μέχρι να σταματήσουν στιγμιαία για πρώτη φορά, στην κάτω ακραία θέση της τροχιάς τους, είναι $S_1 = 2A_1$ (6) , και ο χρόνος που κινούνται μέχρι τότε είναι $\Delta t_1 = \frac{T_1}{2}$ (7)

Από τις (5) , (6) , (7) προκύπτουν

$\Delta\ell_1 = A_1 = 0,3$ m (8) και $T_1 = \frac{2\pi}{5}$s (9) .

Εξ' άλλου, από τις (1) και (2) έχομε ότι $m_1 g = 2k\cdot\Delta\ell_1$ ή $k = m_1 g / 2\cdot\Delta\ell_1$ και με βάση την (8)

k = 200N/m (10)

ii) Για την περίοδο T_1 ισχύει η σχέση $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m_1}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m_1}{2k}}$ και με βάση τις (9) και (10)

M = 4 kg (11)

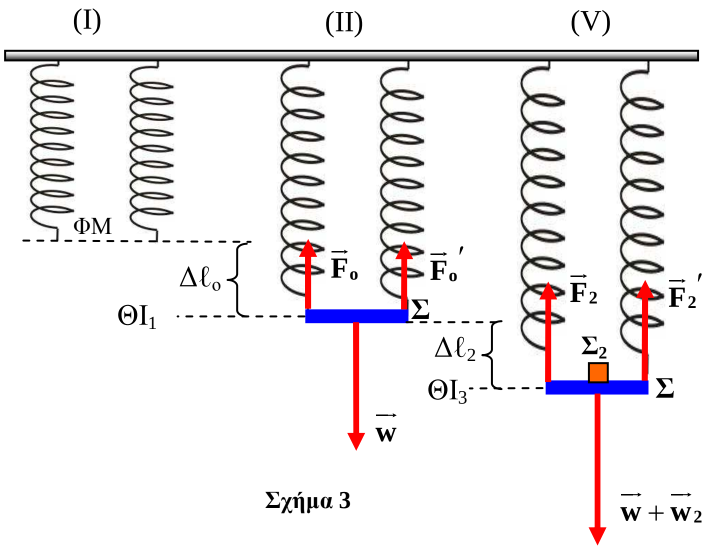
iii) Όμοια για την περίοδο T_2 του συστήματος σανίδα Σ - σώμα Σ_2 , ($\Sigma - \Sigma_2$) , ισχύει ότι

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m_2}{2k}} \text{ με } T_2 = 2(\Delta t_2) = \frac{3\pi}{5}\text{ s , και μετά τις πράξεις}$$

m_2 = 32 kg (12)

iv) Η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του συστήματος Σ- Σ_2 είναι

$$K_{2,max} = \frac{1}{2}(M+m_2)\upsilon_{2,max}^2 = \frac{1}{2}\cdot 2k\cdot A_2^2 \quad (13)$$



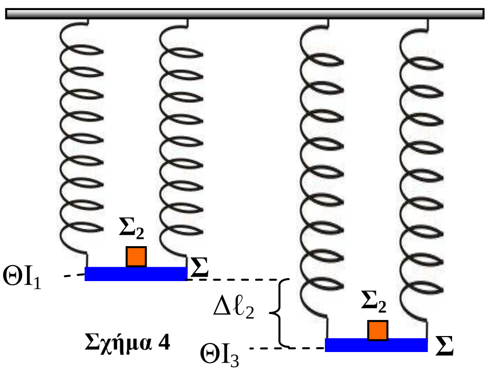
Σχήμα 3

Αλλά στη θέση ισορροπίας του συστήματος Σ - Σ_2 σχήμα 3 εικόνα (V) - , ισχύει ότι

$$\vec{w}+\vec{w}_2+\vec{F}_2+\vec{F}_2{}'=\vec{0} \text{ ή}$$

$$Mg+m_2g = k(\Delta\ell_o+\Delta\ell_2)+k(\Delta\ell_o+\Delta\ell_2) \text{ ή}$$

$$Mg+m_2g = 2k\cdot\Delta\ell_o+2k\cdot\Delta\ell_2 \quad \text{και με βάση την (1)}$$



Σχήμα 4

$$m_2g = 2k\cdot\Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2=\frac{m_2g}{2k}=0{,}8\,m.$$

Εξ άλλου, το σύστημα Σ- Σ_2 , όταν αρχίζει η ταλάντωση , ηρεμεί στιγμιαία στη ΘI_1 όπως φαίνεται στο σχήμα 4, άρα

$$\Delta\ell_2 = A_2 = 0{,}8 \text{ m} \qquad (14)$$

Από την (13) με βάση τις (10), (11), (12) και (14) μετά τις πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathbf{K_{2,max} = 128\ j}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης