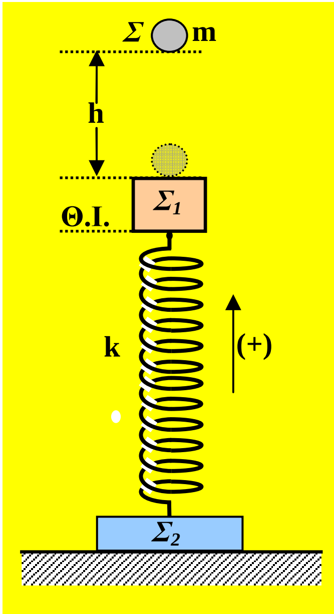
Πλαστική κρούση-Ταλάντωση-Χάσιμο επαφής.

Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $\mathbf{m_1=3kg}$ και $\mathbf{m_2=4kg}$ είναι δεμένα στα άκρα κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k**, έτσι ώστε το $Σ_2$ να ακουμπά στο έδαφος και το $Σ_1$ να ισορροπεί ακίνητο στο πάνω άκρο του ελατηρίου. Τρίτο σώμα Σ μάζας **m=1kg** αφήνεται από ύψος **h,** στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, πάνω από το σώμα $Σ_1$ στην με το οποίο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται ταλαντώνεται με χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $\mathbf{x = Αημ\left(ωt + \frac{5π}{6}\right)(S.I.)}$ θεωρώντας ως t=0 την στιγμή αμέσως μετά την κρούση και θετική την φορά προς τα πάνω. Αν το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου μεγιστοποιείται για 1η φορά μετά την κρούση την χρονική στιγμή $\mathbf{t_1 = \frac{2π}{15}s}$, να υπολογιστούν:



α. η περίοδος ταλάντωσης Τ του συσσωματώματος.

β. η σταθερά k του ελατηρίου και το πλάτος Α της ταλάντωσης.

γ. το ύψος h από το οποίο αφήνεται το σώμα.

δ. η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα $Σ_2$ από το οριζόντιο επίπεδο κατά την διάρκεια ταλάντωσης του συσσωματώματος.

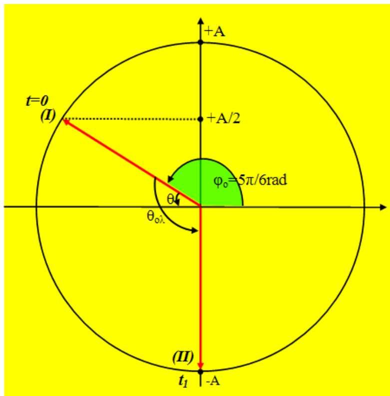
ε. το μέγιστο ύψος h από το οποίο μπορεί να αφεθεί το σώμα Σ χωρίς να χάσει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο το σώμα $Σ_2$ κατά την ταλάντωση του συσσωματώματος που θα δημιουργηθεί.

Δίνεται $g=10m/s^2$. Θεωρήστε αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης καθώς και τις πάσης φύσεως τριβές κατά την κίνηση των σωμάτων.

Λύση:

α) Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση θα εκτελέσει α.α.τ. γύρω από μία νέα θέση ισορροπίας, η οποία βρίσκεται πιο κάτω από αυτή του σώματος m1. Για t=0, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην θέση

$$x = Αημ\frac{5π}{6} = A \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = +\frac{A}{2}$$



και για την ταχύτητά του ισχύει

$$u = ωAσυν\frac{5π}{6} = ωA\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$

δηλαδή κινείται προς τα κάτω.

Για την δύναμη του ελατηρίου ισχύει $\overrightarrow{F_{ελ}} = -k\overrightarrow{Δl}$ όπου $\overrightarrow{Δl}$ η παραμόρφωση από την θέση φυσικού μήκους. Επομένως το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου μεγιστοποιείται ότι το ελατήριο έχει μέγιστη παραμόρφωση από την ΘΦΜ. Αυτό συμβαίνει όταν το συσσωμάτωμα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Άρα για t=0 το περιστρεφόμενο διάνυσμα βρίσκεται στην θέση Ι(ώστε η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα να είναι $\varphi_o=\frac{5\pi}{6}rad$) και μέχρι να βρεθεί στην κάτω ακραία θέση ΙΙ έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία

$$\theta_{o\lambda}=\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}rad$$

Άρα

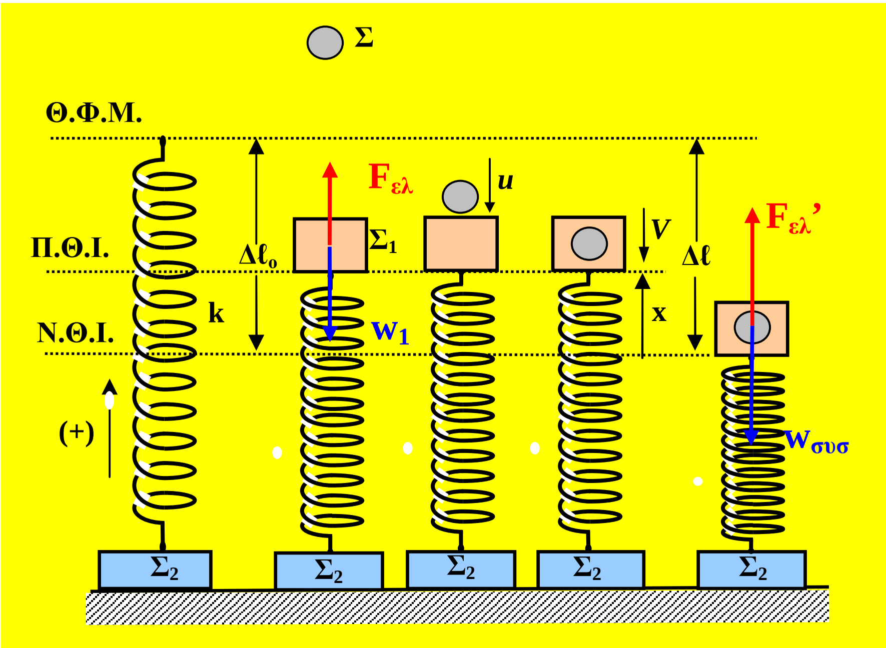
$$\omega=\frac{\theta_{o\lambda}}{t_1}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{15}}\Rightarrow \omega=5rad/s$$

Οπότε:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \boxed{T=0{,}4\pi\ s}$$

β) Το συσσωμάτωμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς

$$D=k=(m+m_1)\omega^2\Rightarrow \boxed{k=100N/m}$$



Για τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}}+\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow k\Delta l_o=m_1g\Rightarrow \Delta l_o=\frac{m_1g}{k}=0{,}3m$$

Ενώ για την θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{F'_{\varepsilon\lambda}}+\overrightarrow{w_{\sigma\upsilon\sigma}}=\vec{0}\Rightarrow k\Delta l=(m_1+m)g\Rightarrow \Delta l_o=\frac{(m_1+m)g}{k}=0{,}4m$$

Οπότε για την απομάκρυνση του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας την t=0 είναι:

$$x=\Delta l-\Delta l_o=\frac{A}{2}=0{,}1m\Longrightarrow \boxed{A=0{,}2m}$$

γ) Εφόσον είναι γνωστή η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του συσσωματώματος, μπορούμε να βγάλουμε και την χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσής του

$$V = \omega A \sigma \upsilon \nu \left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow V = 1 \cdot \sigma \upsilon \nu \left(5t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Επομένως αμέσως μετά την κρούση(t=0) είναι

$$V = 1 \cdot \sigma \upsilon \nu \left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} m/s$$

(το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το συσσωμάτωμα κινείται προς την αρνητική φορά, δηλαδή προς τα κάτω).

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\overrightarrow{p_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{p_{\tau\varepsilon\lambda}} \Rightarrow m|\vec{u}| = (m_1 + m)|\vec{V}| \Rightarrow |\vec{u}| = \frac{(m + m_1)|\vec{V}|}{m} = \frac{(1+3)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{1} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = 2\sqrt{3} m/s}$$

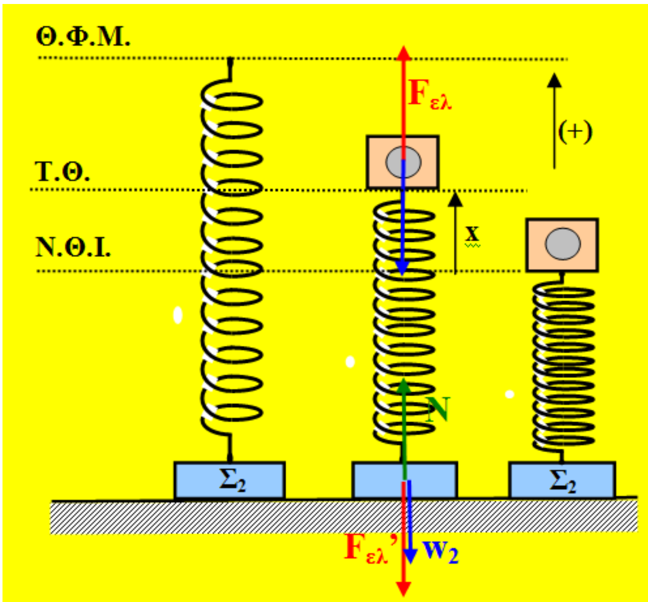
Για την ελεύθερη πτώση του σώματος, εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την θέση κρούσης.

$$\frac{1}{2} m u^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{|\vec{u}|^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{12}{20} \Rightarrow \boxed{h = 0{,}6m}$$

δ) Για την ταλάντωση του συσσωματώματος ισχύει:

$$\overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}} + \vec{w} = -D\vec{x}$$

Όταν σε μία σχέση όλα τα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα με τις αλγεβρικές τιμές ΑΔΙΑΦΟΡΩΝΤΑΣ για την θετική φορά που καθορίζει η άσκηση, οπότε η παραπάνω γράφεται:



$$F_{\varepsilon\lambda} + w = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -w - Dx$$

Τώρα όταν αντικατασταθούν οι αλγεβρικές τιμές με αριθμούς θα ληφθεί υπόψη η θετική φορά, προσέχοντας ότι η αλγεβρική τιμή του βάρους του συσσωματώματος είναι $w=(m+m_1)(-|\vec{g}|)=-40N$, οπότε:

$F_{\varepsilon\lambda}=-(-40)-100x \Rightarrow$

$$\boxed{F_{\varepsilon\lambda} = 40 - 100x, \mu\varepsilon -0{,}2 \leqslant x \leqslant +0{,}2m}$$

Για τις δυνάμεις που ασκεί το ελατήριο στα σώματα που είναι δεμένα στα άκρα του ισχύει:

$$\overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}'} = -\overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}}$$

Και αλγεβρικά:

$$F_{\varepsilon\lambda}' = -F_{\varepsilon\lambda} = 100x - 40 \quad \mu\varepsilon \quad -0{,}2m \leq x \leq 0{,}2m$$

Κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, το σώμα Σ_2 ισορροπεί ακίνητο οπότε θα είναι:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} + \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}'}$$

Και αλγεβρικά

$$N = -m_2(-|\vec{g}|) - F'_{\varepsilon\lambda} = 40 - 100x + 40$$

$$\boxed{N = 80 - 100x \;\; \mu\varepsilon - 0{,}2 \leqslant x \leqslant +0{,}2m}$$

Παρατηρούμε ότι όσο η απομάκρυνση x αλγεβρικά αυξάνεται η τιμή της κάθετης αντίδρασης N ελαττώνεται. Οπότε, η ελάχιστη τιμή προκύπτει για x=+0,2m

$$N_{min}=80-100(+0{,}2) \Rightarrow N_{min}=60N$$

Και η μέγιστη τιμή προκύπτει για x=-0,2m

$$N_{max}=80-100(-0{,}2) \Rightarrow N_{max}=100N$$

ε) Για να είναι το σώμα μάζας Σ_2 διαρκώς σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο πρέπει

$$N \geq 0$$

Όταν N=0 το σώμα μάζας Σ_2 χάνει(οριακά) την επαφή του, οπότε

$$N_{min}=0 \Rightarrow 80-100A_{max}=0 \Rightarrow A_{max}=0{,}8m$$

Για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}(m + m_1)\left|\vec{V}\right|^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Οπότε για $A=A_{max}$

$$\left|\vec{V}_{max}\right| = \omega\sqrt{A_{max}^2 - x^2} = 5\sqrt{0{,}8^2 - 0{,}1^2} = 5\sqrt{0{,}63}\, m/s$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\overrightarrow{p_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{p_{\tau\varepsilon\lambda}} \Rightarrow m|\vec{u}_{max}| = (m_1 + m)\left|\vec{V}_{max}\right| \Longrightarrow |\vec{u}_{max}| = \frac{(m + m_1)\left|\vec{V}_{max}\right|}{m} \Longrightarrow |\vec{u}_{max}| = 20\sqrt{0{,}63}\, m/s$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για την ελεύθερη πτώση του σώματος Σ θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την θέση κρούσης έχουμε:

$$mgh_{max} = \frac{1}{2}m|\vec{u}_{max}|^2 \Rightarrow h_{max} = \frac{|\vec{u}_{max}|^2}{2g} = \frac{400 \cdot 0{,}63}{20} \Rightarrow \boxed{h_{max} = 12{,}6m}$$

Πέτρος Καραπέτρος

pkarapetros@hotmail.com