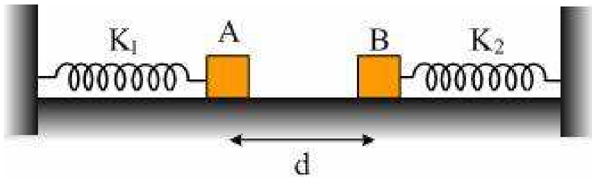
Συνάντηση σωμάτων που ταλαντώνονται.



Τα σώματα Α και Β του σχήματος έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=m=1Kg$. Τα δύο σώματα ισορροπούν πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, με τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος. Τα ελατήρια έχουν ίσες σταθερές σκληρότητας $k_1=k_2=k=$ =100 N/m. Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι ίση με d=10cm.

Απομακρύνουμε προς τα αριστερά το σώμα Α κατά x=20cm και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από την ηρεμία. Το σώμα Α συγκρούεται με το σώμα Β, με αποτέλεσμα κατά την κρούση των δύο σωμάτων να πραγματοποιηθεί ανταλλαγή ταχυτήτων.

i) Πόση είναι η μέγιστη συσπείρωση του κάθε ελατηρίου μετά την κρούση και ποια χρονική στιγμή εμφανίζεται;

ii) Πότε θα συναντηθούν για πρώτη φορά μετά την κρούση τα δύο σώματα και σε ποια θέση; Ποια η ταχύτητα κάθε σώματος οριακά πριν τη συνάντηση;

Αρχή μέτρησης του χρόνου t=0 θεωρούμε τη στιγμή της 1ης κρούσης και αρχή του άξονα χ΄χ, ο οποίος συμπίπτει με τον κοινό άξονα των δύο ελατήριων, την αρχική θέση του σώματος Α.

Δίνεται: συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ

Απάντηση:

i) Υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Α οριακά πριν την κρούση. Αυτό μπορεί να γίνει:

α) Εφόσον κατά τη διάρκεια της κίνησης παράγεται έργο μόνο από τη συντηρητική δύναμη του ιδανικού ελατηρίου, διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα Α-ελατήριο, η οποία περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια του σώματος Α και τη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του ελατηρίου:

$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\kappa\Delta l_1^2 = \frac{1}{2}\kappa\Delta l_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\kappa(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)}{m}} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}\frac{m}{s}$$

αφού η αρχική θέση αντιστοιχεί σε συσπείρωση $\Delta l_1 = 0,2m$ ενώ η τελική σε επιμήκυνση $\Delta l_2 = 0,1m$.

β) Μπορούμε αντίστοιχα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος Α:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_{ελ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - 0 = \frac{1}{2}\kappa\Delta l_1^2 - \frac{1}{2}\kappa\Delta l_2^2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\kappa(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)}{m}} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}\frac{m}{s}$$

γ) Το σώμα Α μόλις αφεθεί ελεύθερο εκτελεί Α.Α.Τ με σταθερά επαναφοράς D=k=100 N/m και Θ.Ι της Α.Α.Τ τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Τη στιγμή της κρούσης, η απομάκρυνση από τη Θ.Ι της Α.Α.Τ είναι ίση με χ1=0,1m. Επειδή το σώμα Α ξεκινά από την ηρεμία, η θέση αυτή είναι ακρότατη της Α.Α.Τ, άρα η αρχική απομάκρυνση είναι ίση με το πλάτος χ2=Α=0,2m. Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{ολ(\chi_2=0,2m)} = E_{ολ(\chi_1=0,1m)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\kappa x_2^{\ 2} = \frac{1}{2}\kappa x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^{\ 2} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\kappa(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2})}{m}} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Εφόσον κατά την κρούση των δύο σωμάτων πραγματοποιείται ανταλλαγή ταχυτήτων, αμέσως μετά την κρούση το σώμα Α έχει μηδενική ταχύτητα $\upsilon_1^{'} = 0$ και το σώμα Β $\upsilon_2^{'} = \sqrt{3}\frac{m}{s}$.

Κάθε σώμα αμέσως μετά μτην κρούση εκτελεί Α.Α.Τ με σταθερά επαναφοράς D=k=100 N/m και Θ.Ι της Α.Α.Τ τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Επειδή το σώμα Α ξεκινά από την ηρεμία($\upsilon_1^{'} = 0$) , η θέση αυτή είναι ακρότατη της Α.Α.Τ, άρα η αρχική απομάκρυνση είναι ίση με το πλάτος χ1=Α1=0,1m. Προφανώς το πλάτος της Α.Α.Τ είναι αριθμητικά ίσο με τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου k1: $\Delta l_{1(\max)} = 0{,}1m$.

Το σώμα Α φθάνει στην ακρότατη θέση της ταλάντωσής του, όπου εμφανίζεται η μέγιστη συσπείρωση, τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{10}s$$ αφού ξεκινά από ακρότατη θέση.

Το σώμα Β ξεκινά από τη Θ.Ι της Α.Α.Τ, οπότε η ταχύτητά του είναι η μέγιστη της ταλάντωσης:

$$\upsilon_2^{'} = \omega A_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \Leftrightarrow A_2 = \upsilon_2^{'}\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow A_2 = \frac{\sqrt{3}}{10}m = 0{,}1\sqrt{3}m$$

Προφανώς το πλάτος της Α.Α.Τ είναι αριθμητικά ίσο με τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου k2:

$$\Delta l_{2(\max)} = 0{,}1\sqrt{3}m .$$

Το σώμα Β φθάνει στην ακρότατη θέση της ταλάντωσής του, όπου εμφανίζεται η μέγιστη συσπείρωση, τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow t_2 = \frac{\pi}{20}s$$ αφού ξεκινά από τη Θ.Ι της Α.Α.Τ.

ii) Θεωρούμε άξονα χ΄χ, ο οποίος συμπίπτει με τον κοινό άξονα των δύο ελατήριων. Η αρχή του άξονα (χ=0) συμπίπτει με την αρχική θέση του σώματος Α, ενώ η θετική φορά λαμβάνεται προς τα δεξιά. Τα δύο σώματα μετά την κρούση εκτελούν Α.Α.Τ με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \Leftrightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

Η θέση του σώματος Α πάνω στον άξονα χ΄χ δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x_1 = 0{,}1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})(S.I) \quad (1)$$

αφού η ταλάντωσή του ξεκινά από τη θετική ακρότατη θέση, οπότε έχει αρχική φάση: φ=π/2. Τονίζεται ότι η Θ.Ι της Α.Α.Τ συμπίπτει με την αρχή του άξονα χ΄χ.

Η θέση του σώματος Β πάνω στον άξονα χ΄χ δίνεται από τη σχέση:

$$x_2 = d + A_2\eta\mu\omega t \Leftrightarrow x_2 = 0{,}1 + 0{,}1\sqrt{3}\eta\mu 10t(S.I) \quad (2)$$

αφού η ταλάντωσή του ξεκινά από τη θέση με συντεταγμένη x=d=0,1m, ενώ δεν εμφανίζει αρχική φάση.
Η συνάντηση των δύο σωμάτων θα γίνει τη χρονική στιγμή όπου:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 0{,}1\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 0{,}1 + 0{,}1\sqrt{3}\eta\mu\omega t \Leftrightarrow 0{,}1\sigma\upsilon\nu\omega t = 0{,}1 + 0{,}1\sqrt{3}\eta\mu\omega t \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega t - \sqrt{3}\eta\mu\omega t = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t - \frac{\eta\mu\,\pi/3}{\sigma\upsilon\nu\,\pi/3}\eta\mu\omega t = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega t\sigma\upsilon\nu\,\pi/3 - \eta\mu\omega t\eta\mu\,\pi/3 = \sigma\upsilon\nu\,\pi/3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} (3)$$

Για την εξαγωγή της σχέσης (3) χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ταυτότητα:

συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ καθώς και ότι $\varepsilon\varphi\,\pi/3 = \sqrt{3}$.

Λύνοντας την (3) έχουμε:

$$\omega t + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2\kappa\pi \Leftrightarrow t = \kappa\mathrm{T}, \kappa = 0,1,2...(4) \quad \text{ή}$$

$$\omega t + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow t = \kappa\mathrm{T} - \frac{\mathrm{T}}{3}, \kappa \in \mathrm{Z}(5)$$

$$\acute{O}\mu\omega\varsigma : t > 0 \Leftrightarrow \kappa\mathrm{T} - \frac{\mathrm{T}}{3} > 0 \Leftrightarrow \kappa\mathrm{T} > \frac{\mathrm{T}}{3} \Leftrightarrow \kappa > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \kappa = 1,2,3,....$$

Η σχέση (5) για κ=1 δίνει τη χρονική στιγμή που τα σώματα Α και Β συναντιόνται για πρώτη φορά μετά την κρούση:

$$t = T - \frac{T}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2T}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \Leftrightarrow t = \frac{4\pi}{30}s$$

Η σχέση (4) δείχνει ότι αν δεν είχε πραγματοποιηθεί νωρίτερα άλλη κρούση, τα δύο σώματα θα συναντιόνταν μετά από μία περίοδο στο σημείο της αρχικής κρούσης, κάτι τέτοιο όμως δε θα συμβεί αφού συγκρούονται νωρίτερα.

Τα δύο σώματα συναντιόνται στη θέση:

$$(1) \Rightarrow x_1 = 0{,}1\eta\mu(10\frac{4\pi}{30} + \frac{\pi}{2})m = 0{,}1\eta\mu(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2})m \Leftrightarrow x_1 = 0{,}1\eta\mu\frac{11\pi}{6}m$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0{,}1(-\frac{1}{2})m \Leftrightarrow x_1 = -0{,}05m$$

Το σώμα Α διέρχεται από τη θέση αυτή κινούμενο κατά τη θετική φορά $(\frac{T}{2} < \frac{2T}{3} < \frac{3T}{4})$ με ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = \omega\sqrt{A_1^2 - x^2} \Leftrightarrow \upsilon_1 = 10\sqrt{10^{-2} - 25\cdot 10^{-4}}\frac{m}{s} \Leftrightarrow \upsilon_1 = 0{,}5\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

ενώ το σώμα Β διέρχεται από τη θέση αυτή κινούμενο κατά την αρνητική φορά $(\frac{T}{2} < \frac{2T}{3} < \frac{3T}{4})$ με ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = -\omega\sqrt{A_2^2 - x^2} \Leftrightarrow \upsilon_2 = -10\sqrt{3\cdot 10^{-2} - 25\cdot 10^{-4}}\frac{m}{s} \Leftrightarrow \upsilon_2 = -0{,}5\sqrt{11}\frac{m}{s}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης