Ταλάντωση δύο σωμάτων και … τελικά ενός.

Σώμα μάζας m_1=1kg είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Μετατοπίζουμε το σώμα μάζας m_1 στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το συνδέουμε μέσω αβαρούς νήματος με σώμα μάζας m_2. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο οπότε εκτελεί α.α.τ με περίοδο $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται σε συνάρτηση με χρόνο σύμφωνα με τη σχέση Κ=1-συν20t (S.I). Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση της α.α.τ είναι y=+A όπου Α το πλάτος της.

i) Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 και το πλάτος Α της α.α.τ που εκτελεί το σύστημα και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της α.α.τ σε συνάρτηση με το χρόνο y=y(t).

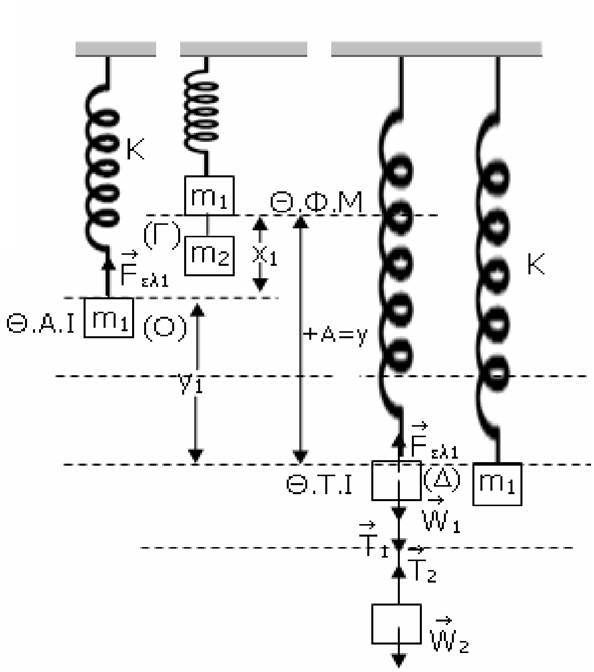
ii) Να γράψετε την έκφραση της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας m_2 σε συνάρτηση με το χρόνο και να την απεικονίσετε γραφικά.

iii) Τη χρονική στιγμή που το ταλαντευόμενο σύστημα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κόβουμε το νήμα. Να υπολογίσετε το πλάτος της νέας α.α.τ που θα εκτελέσει το σύστημα ελατήριο – σώμα μάζας m_1.

Δίνεται g=10m/s^2 .

Απάντηση:

i) Το σύστημα ελατήριο, σώμα μάζας m_1 και σώμα μάζας m_2 τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση y=+A. Η εξίσωση της α.α.τ είναι y=Αημ(ωt+φ_0) (1). Για t=0: y=+A



$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} + A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\eta\mu\varphi_0 = 1\\ 0 < \varphi_0 \le 2\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\varphi}_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}.$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow y = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ και}$$

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2).$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ \upsilon^2_{max}\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\omega^2 A^2\left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}\right) \Rightarrow$$

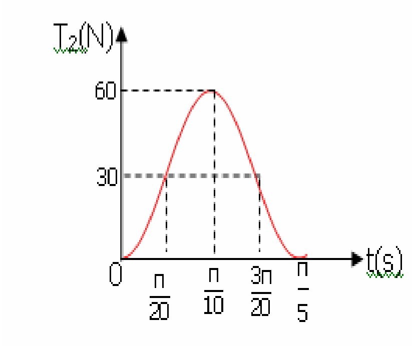
$$K = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)\omega^2 A^2 - \frac{1}{4}(m_1 + m_2)\omega^2 A^2\sigma\upsilon\nu 2\omega t \quad (3).$$

Από τη σύγκριση της (3) και της δοθείσας K=1-συν20t προκύπτει ότι: $\frac{1}{4}(m_1+m_2)\omega^2A^2=1$ (4) και $2\omega=20 \Rightarrow \omega=10\text{rad/s}$ (5) Από την (5) προκύπτει:

$$\frac{2\pi}{T}=10\text{rad/s} \Rightarrow T=\frac{\pi}{5}\text{s} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow m_2=3\text{kg}\ \ (6). \text{Από (4)} \underset{(6)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} A=0{,}1\text{m}\ \ (7). \text{ Από (1)} \underset{(6)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} y=0{,}1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})\ \ (8).$$

ii) Η εφαρμογή του 2[ου] Νόμου το Newton για το σώμα μάζας m_2 δίνει:



$$\Sigma\vec{F}=m_2\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{W}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a} \Rightarrow -m_2g+T_2=-m_2\omega^2y$$

(θεωρήθηκε ως θετική η φορά των θετικών απομακρύνσεων της ταλάντωσης)

$$\Rightarrow T_2=m_2g-m_2\omega^2y \underset{(6)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} T_2=30-300y \overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$T_2=30-30\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T_2=30-30\sigma\upsilon\nu 10t\ \ (\text{S.I})$$

Η γραφική παράσταση $T_2=F(t)$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα:

iii) Η ταχύτητα των σωμάτων στη θέση ισορροπίας (Δ) της α.α.τ που εκτελούν είναι $\upsilon_\Delta=\upsilon_{max}=\omega A \underset{(7)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}}$ $\upsilon_\Delta=1\text{m/s}$ (9) και το σώμα μάζας m_1 απέχει απόσταση $|y_1|$ από τη θέση ισορροπίας του (Ο) γύρω από την οποία θα εκτελέσει τη νέα α.α.τ με περίοδο

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow T_1=\frac{\pi}{10}\text{s}\ \ (10)$$

και γωνιακή συχνότητα $\omega_1=20\text{rad/s}$.

Από τη θέση αρχικής ισορροπίας (Ο) του σώματος μάζας m_1:

$$\Sigma\vec{F}_{(O)}=0 \Rightarrow \vec{W}_1+\vec{F}_{\varepsilon\lambda 1}=0 \Rightarrow m_1g-kx_1 \Rightarrow x_1=\frac{m_1g}{k}\ \ (11).$$

Από τη θέση ισορροπίας (Δ) της α.α.τ που εκτελεί το σύστημα ελατήριο, σώμα μάζας m_1 και σώμα μάζας m_2:

$$\Sigma\vec{F}_{(\Delta)}=0 \Rightarrow \vec{W}_1+\vec{W}_2+\vec{T}_1+\vec{T'}_1+\vec{T}_2+\vec{T'}_2+\vec{F}_{\varepsilon\lambda 2}=0$$

$$\underset{\vec{T}_2=-\vec{T'}_2}{\overset{\vec{T}_1=-\vec{T'}_1}{\Rightarrow}} \vec{W}_1+\vec{W}_2+\vec{F}_{\varepsilon\lambda 2}=0 \Rightarrow$$

$$m_1g + m_2g = k(x_1 + y_1) \overset{(11)}{\Rightarrow} y_1 = \frac{m_2g}{k} \overset{(6)}{\Rightarrow} y_1 = \frac{3}{40}m \quad (12).$$

Η ενέργεια της νέας α.α.τ πλάτους A_1 που θα εκτελέσει το σύστημα ελατήριο – σώμα μάζας m_1 παραμένει σταθερή: $E=U_{(\Delta)}+K_{(\varepsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_\Delta^2 \underset{(12)}{\overset{(9)}{\Rightarrow}} A_1 = 0,09m = 9cm \quad (13).$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξενοφών Στεργιάδης