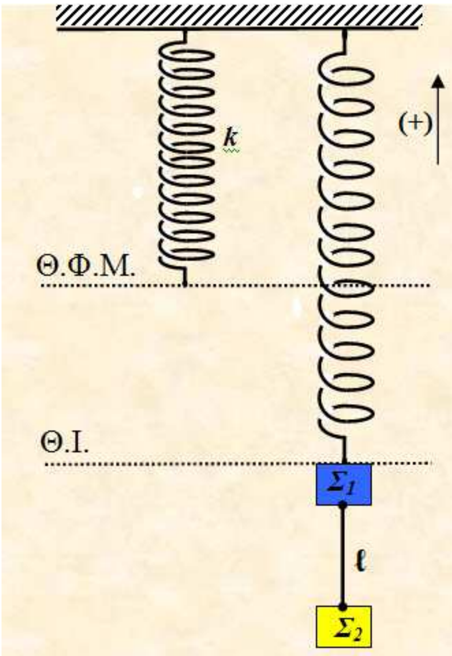
Ταλάντωση και κόψιμο νήματος.



Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ που φαίνονται στο σχήμα έχουν μάζες $\mathbf{m_1=1kg}$ και $\mathbf{m_2=3kg}$ αντίστοιχα και είναι δεμένα μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους **l=0,7m**. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς **k=100N/m**, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Εκτρέπουμε το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα κάτω κατά **d=0,3m** και την χρονική στιγμή **t=0** το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί.

Α. **i)** Να αποδείξετε ότι το σύστημα εκτελεί α.α.τ.

ii) Να γραφεί η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος $Σ_2$ από τη θέση ισορροπίας του και η χρονική εξίσωση της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα $Σ_2$, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω.

iii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση των σωμάτων τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ισούται με τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

iv) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση $\mathbf{d_{max}}$ που μπορούμε να εκτρέψουμε αρχικά το σύστημα, ώστε το νήμα να παραμένει διαρκώς τεντωμένο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

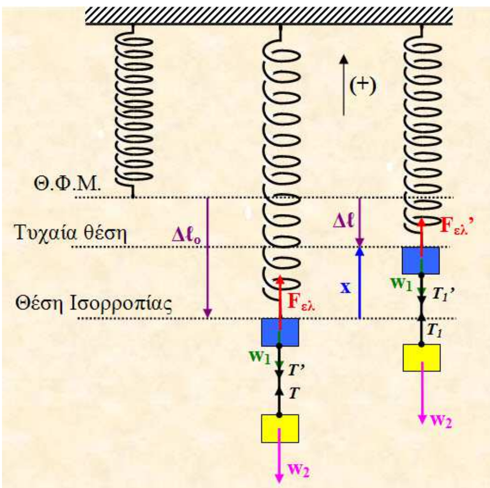
Β. Κάποια στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, κόβουμε το νήμα.

i) Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης του $Σ_1$.

ii) Να υπολογιστεί η απόσταση των σωμάτων, όταν το $Σ_1$ ακινητοποιηθεί για $1^η$ φορά μετά το κόψιμο του νήματος.

Δίνονται: $g=10m/s^2$, $π^2=10$, και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Λύση:



Α. ***i)*** Για την ισορροπία του σώματος $Σ_2$:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\vec{T}+\vec{w}_2=\vec{0}\Rightarrow\vec{w}_2=-\vec{T}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές: $\vec{T}'=-\vec{T}$

και για την ισορροπία του σώματος $Σ_1$ έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\vec{T}'+\vec{w}_1+\vec{F}_{\varepsilon\lambda}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\vec{T}'+\vec{w}_2-k\Delta\vec{l}_o=\vec{0}$$
$$\Rightarrow-\vec{T}+\vec{w}_2-k\Delta\vec{l}_o=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\vec{w}_1+\vec{w}_2-k\Delta\vec{l}_o=\vec{0}$$

και αλγεβρικά:

$$w_1+w_2-k\Delta l_o=0 \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του συστήματος:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{w}_2 + \vec{T}_1 + \vec{w}_1 + \vec{T}_1' + \vec{F}_{\varepsilon\lambda}' = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 - k\Delta\vec{l} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 - k(\Delta\vec{l}_o + \vec{x})$$

και αλγεβρικά:

$$\Sigma F = w_1 + w_2 - k(\Delta l_o + x) = w + w - k\Delta l_o - kx$$

Και λόγω της σχέσης (1)

$$\Sigma F = -kx$$

Άρα το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς D=k=100N/m/

ii) Το σύστημα των δύο σωμάτων ταλαντώνεται ως ενιαίος ταλαντωτής με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5rad/s$$

Το σύστημα των δύο σωμάτων αφήνεται να ταλαντωθεί από μία θέση με μηδενική ταχύτητα, οπότε η θέση αυτή θα αποτελεί κάτω ακραία θέση ταλάντωσης. Έτσι, η αρχική απομάκρυνση d από τη θέση ισορροπίας θα ισούται με το πλάτος Α της ταλάντωσης. Το σώμα Σ_2 θα βρίσκεται λοιπόν στη θέση x=-A(θετική φορά προς τα πάνω) για t=0. Άρα:

$$-A = A\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = -1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{0\leq\varphi_o<2\pi\ rad} \varphi_o = \frac{3\pi}{2}rad$$

Άρα η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 θα είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}3 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

Η τάση του νήματος T και το βάρος w_2 είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2 στη διεύθυνση ταλάντωσης, και η συνισταμένη τους παίζει ρόλο δύναμης επαναφοράς. Οπότε για την ταλάντωση του Σ_2 γράφουμε:

$$\Sigma\vec{F} = -m_2\omega^2\vec{x} \Rightarrow \vec{T} + \overrightarrow{w_2} = -m_2\omega^2\vec{x}$$

Και αλγεβρικά:

$$T + w_2 = -m_2\omega^2 x \Rightarrow T = -w_2 - m_2\omega^2 x \Rightarrow T = -3\cdot(-10) - 3\cdot 25\cdot 0{,}3\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 30 - 22{,}5\eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

iii) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}Dx^2$$

όπου x η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του συστήματος, ενώ η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}kΔl^2$$

όπου Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους. Όπως παρατηρούμε σε οποιαδήποτε τυχαία θέση ταλάντωσης ισχύει:

$$Δ\vec{l} = Δ\vec{l}_o + \vec{x}$$

όπου $Δ\vec{l}$ η παραμόρφωση του ελατηρίου στη τυχαία θέση και $Δ\vec{l}_o$ η παραμόρφωση του ελατηρίου όταν το σύστημα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του(τα διανύσματα $Δ\vec{l}_o$ και $\vec{x}$ είναι διαδοχικά). Και αλγεβρικά:

$$Δl=Δl_o+x$$

Έτσι:

$$U_{ταλ} = U_{ελ} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}kΔl^2 \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}k(Δl_o + x)^2 \Rightarrow$$

$$x = Δl_o + x \ (2) \quad ή \quad x = -(Δl_o + x) \ (3)$$

Από την (2) προκύπτει $Δl_o=0$(απορρίπτεται) ενώ από την (3) προκύπτει:

$$x = -\frac{Δl_o}{2} \ (4)$$

όπου από την (1) έχουμε $Δl_o = \frac{(m_1+m_2)g}{k} = \frac{(1+3)(-10)}{100} = -0{,}4m$ (στην θέση ισορροπίας του συστήματος η παραμόρφωση $Δ\vec{l}_o$ έχει φορά προς τα κάτω, οπότε η αλγεβρική της τιμή είναι αρνητική, δεδομένου ότι σύμφωνα με την εκφώνηση, θετική φορά ορίζεται η προς τα πάνω). Οπότε:

$$x=+0{,}2m$$

και έτσι:

$$α=-ω^2x \Rightarrow α=-25 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \boxed{a = -5m/s^2}$$

Θα ήθελα να προσέξουμε στο σημείο αυτό το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης αλγεβρικών τιμών. Από την σχέση (5) δεν βρίσκουμε μόνο το μέτρο της απομάκρυνσης, αλλά μας μαρτυρά και σε ποιο σημείο του άξονα ταλάντωσης βρίσκεται το σύστημα(θετικό ημιάξονα, δεδομένου ότι $Δl_o<0$) όταν $U_{ελατ}=U_{ταλ}$.

iv) Για να είναι το νήμα διαρκώς τεντωμένο πρέπει $T \geq 0$. Όμως:

$$T = -w_2 - m_2ω^2x$$

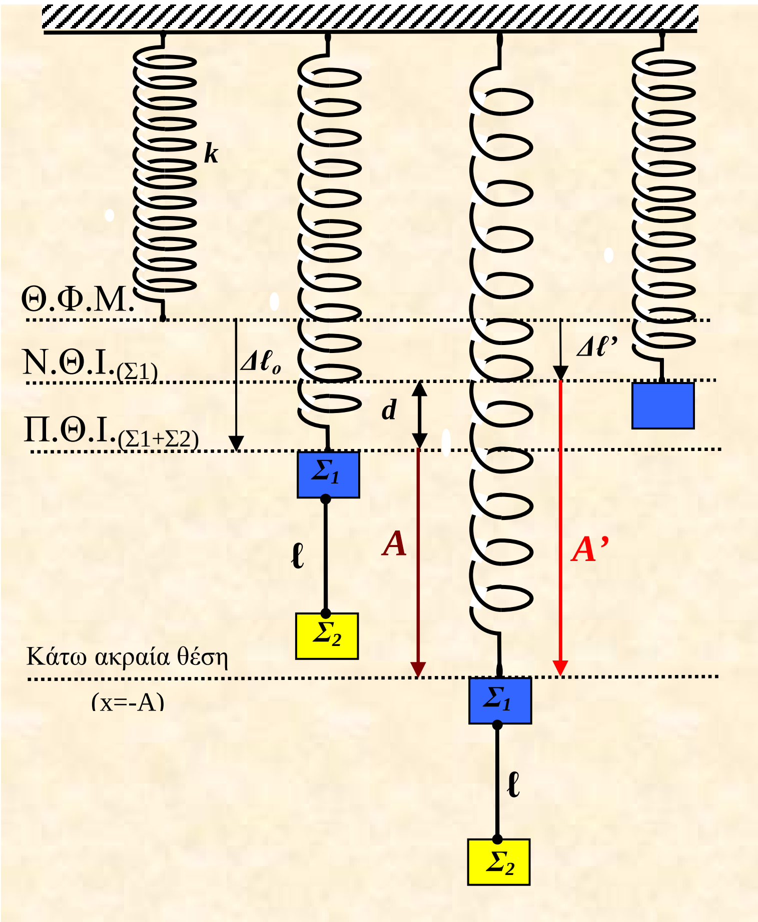
Άρα:

$$-w_2 - m_2ω^2x \geq 0 \Rightarrow -m_2ω^2x \geq w_2 \Rightarrow -m_2ω^2x \geq m_2(-|\vec{g}|) \Rightarrow x \leq \frac{|\vec{g}|}{ω^2} \Rightarrow x_{max} = 0{,}4m$$

Οπότε η μέγιστη απόσταση κατά την οποία μπορεί αρχικά να εκτραπεί το σύστημα των δύο σωμάτων και το νήμα να παραμένει τεντωμένο(χωρίς να χαλαρώνει) είναι:

$$\boxed{d_{max} = 0{,}4m}$$

Β) ***i)*** Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα $Σ_1$ εκτελεί μία νέα ταλάντωση γύρω από μία νέα θέση ισορροπίας(Ν.Θ.Ι) για την οποία ισχύει (κατά μέτρο)



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k\Delta l' = m_1 g \Rightarrow \Delta l' = \frac{m_1 g}{k} = 0{,}1m$$

Και η οποία απέχει από την παλιά θέση απόσταση

$$d = \Delta l_o - \Delta l' = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}4m$$

Το σώμα Σ_1 την στιγμή που κόβεται το νήμα έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε η θέση αυτή θα αποτελεί ακραία θέση και για τη νέα ταλάντωση, οπότε η απόσταση της από την ΝΘΙ θα είναι το νέο πλάτος ταλάντωσης. Άρα:

$$A' = A + d \Rightarrow \boxed{A' = 0{,}6m}$$

ii) Το σώμα Σ_1 ταλαντώνεται μετά το κόψιμο του νήματος με περίοδο

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{5}s$$

Η ταχύτητα του θα μηδενιστεί στιγμιαία για 1η φορά μετά το κόψιμο του νήματος όταν θα βρεθεί στην άνω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Αυτό συμβαίνει μετά από χρονική διάρκεια:

$$\Delta t = \frac{T'}{2} = \frac{\pi}{10} = 0{,}1\pi\ s$$

Και τότε θα έχει διατρέξει προς τα πάνω απόσταση

$$h_1 = 2A' = 1{,}2m$$

Το σώμα Σ_2 μετά το κόψιμο του νήματος εκτελεί ελεύθερη πτώση οπότε, σε χρονική διάρκεια Δt έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω

$$h_2 = \frac{1}{2} g\Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}01 \cdot \pi^2 = 0{,}5m$$

Άρα η απόσταση των σωμάτων είναι:

$$h = h_1 + h_2 + l = 1{,}2 + 0{,}5 + 0{,}7 \ \Rightarrow \boxed{h = 2{,}4m}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος