Ταλάντωση των εμβόλων μιας μηχανής

Το έμβολο Ε1 μιας μηχανής εσωτερικής καύσης, κινείται κατακόρυφα, εκτελώντας 300 απλές αρμονικές ταλαντώσεις ανά λεπτό της ώρας.

Τη χρονική στιγμή t = 0, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $x_o = +0{,}1$m, και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητάς του είναι $\upsilon_o = -\pi$ m/s.

Α. Να αποδείξετε ότι η απομάκρυνση x_1 του εμβόλου Ε1 από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t δίνεται από τη σχέση

$$x_1 = 0{,}1\cdot\sqrt{2}\cdot ημ\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ στο SI}.$$

Β. Ένα δεύτερο έμβολο Ε2 της ίδιας μηχανής που ταλαντώνεται κατακόρυφα με ίδιο πλάτος και με την ίδια συχνότητα με το Ε1, προηγείται σε φάση απ' αυτό κατά π/2 rad. Αν οι θέσεις ισορροπίας των δυο εμβόλων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο να υπολογίσετε :

Β1. τη συνάρτηση απομάκρυνσης – χρόνου $x_2 = f(t)$ για το έμβολο Ε2

Β2. τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δυο εμβόλων

Β3. τις χρονικές στιγμές που τα έμβολα Ε1 , Ε2 θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος

Β4. τις χρονικές στιγμές που η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των Ε1 , Ε2 θα είναι μέγιστη

Β5. τη συνάρτηση d = f(t) όπου d η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των εμβόλων, και να την παραστήσετε γραφικά. Επιβεβαιώστε τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β2 , Β3 , Β4 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης.

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και $ημα - ημβ = 2ημ\left(\frac{α-β}{2}\right)\cdot συν\left(\frac{α+β}{2}\right)$

Απάντηση

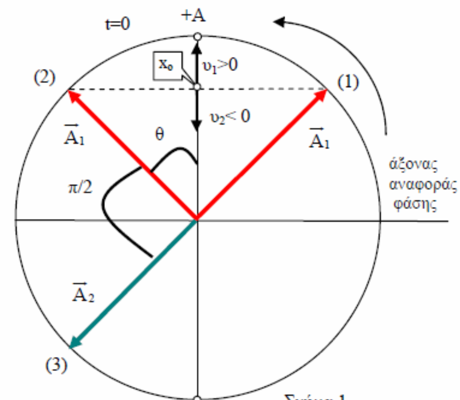
Α. Η συχνότητα των ταλαντώσεων είναι

$$f = \frac{N}{t} = \frac{300}{60}\text{Hz} = 5\text{Hz}$$

και η κυκλική συχνότητα ω = 2πf = 10π rad/s .

Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) για την ταλάντωση του E_1 έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + \frac{1}{2}Dx_o^2 = \frac{1}{2}DA_1^2\\ &D = m\omega^2\end{aligned}\right\} \rightarrow A_1 = 0{,}1\cdot\sqrt{2}\,\text{m}.$$



Σχήμα 1

Στον κύκλο αναφοράς των ταλαντώσεων – σχήμα 1- , τη χρονική στιγμή t = 0 το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_1$ που έχει μέτρο ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης του εμβόλου E_1:

α. επειδή είναι $x_o > 0$ θα βρίσκεται ή στην θέση (1) ή στη θέση (2)

β. επειδή μας δίνεται $\upsilon_o < 0$, συμπεραίνομε ότι βρίσκετε στη θέση (2) και η αρχική φάση είναι $\varphi_o = \frac{\pi}{2} + \theta$

Όμως $\text{συν}\theta = \dfrac{x_o}{A_1} = \dfrac{0,1}{0,1\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ και $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

Η εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου είναι της μορφής $x_1 = A_1\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ άρα

$$x_1 = 0,1\cdot\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ στο SI}$$

Β1. Επειδή η ταλάντωση του εμβόλου E_2 προηγείται σε φάση κατά π/2 , το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}_2$ τη χρονική στιγμή t = 0 θα βρίσκεται στη θέση (3) του σχήματος 1 , και επειδή το πλάτος της είναι $A_2 = A_1$ η συνάρτηση απομάκρυνσης χρόνου για την ταλάντωση αυτή είναι

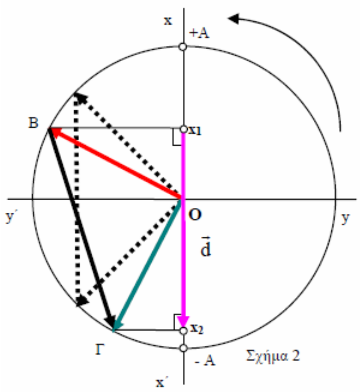
$$x_2 = 0,1\cdot\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$x_2 = 0,1\cdot\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(10\pi t + \frac{5\pi}{4}\right) \text{ στο SI .}$$

Β2. Επειδή τα δυο έμβολα ταλαντώνονται με την ίδια περίοδο, το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ περιστρέφεται χωρίς να μετασχηματίζεται και οι προβολές των διανυσμάτων $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ κάθε χρονική στιγμή t πάνω στον άξονα της κίνησης x΄x , μας δίνουν τις στιγμιαίες θέσεις x_1 , x_2 των δυο εμβόλων.

Εξ' άλλου , όπως φαίνεται στο σχήμα 2, η απόσταση των δυο εμβόλων είναι ίση με την προβολή $\vec{d}$ του διανύσματος $\overrightarrow{ΒΓ}$ στον άξονα x΄x.

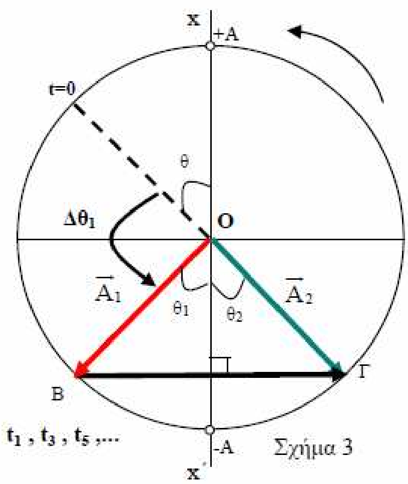
Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\vec{d}$ μεταβάλλεται από $-d_{max}$ μέχρι $+d_{max}$ όπου $d_{max} = \left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|$, όταν το $\overrightarrow{ΒΓ}$ είναι παράλληλο στον x΄x και d = 0 όταν το $\overrightarrow{ΒΓ}$ είναι κάθετο στον άξονα x΄x.



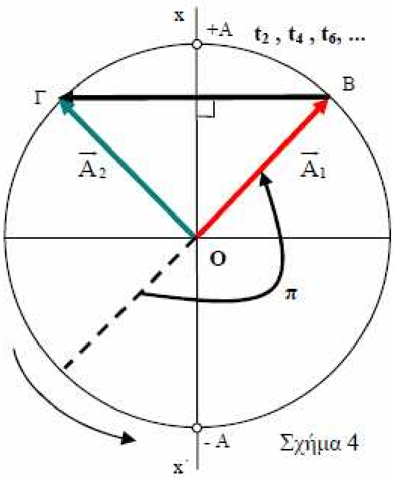
Σχήμα 2

Άρα , **η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση** μεταξύ των δυο εμβόλων με βάση πυθαγόρειο θεώρημα είναι

$$d_{max} = \sqrt{ΟΒ^2 + ΟΓ^2} = A\sqrt{2} = 0,1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \text{ m} = 0,2 \text{ m.}$$



Σχήμα 3



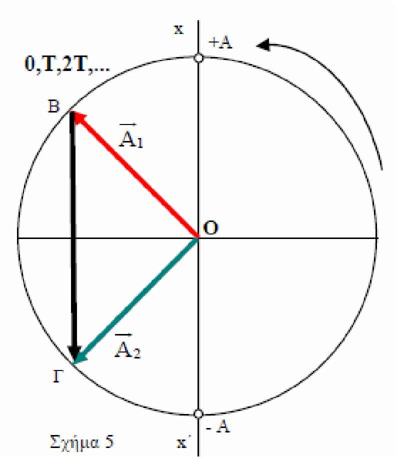
Σχήμα 4

Β3. Τα έμβολα, βρίσκονται στο ίδιο ύψος, όταν κατακόρυφη μεταξύ τους απόσταση είναι $d = 0$, δηλαδή κάθε φορά που το $\overline{\text{ΒΓ}}$ είναι κάθετο στον άξονα x΄x. Έστω ότι αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1 όπως φαίνεται στο σχήμα 3, και για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή t_2 όπως στο σχήμα 4.

Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, στη θέση του σχήματος 3, η Οx΄ είναι ύψος και διχοτόμος άρα $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$.

Άρα το τρίγωνο ΟΒΓ έχει περιστραφεί κατά

$$\Delta\theta_1 = \pi\text{-}(\theta+\theta_1) = \pi/2 \text{ ή } \omega t_1 = \pi \;\; 2 \text{ ή } \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ή } t_1 = \frac{T}{4}$$



Σχήμα 5

Τη χρονική στιγμή t_2 τρίγωνο ΟΒΓ θα έχει περιστραφεί κατά $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1 + \pi$ ή $\Delta\theta_2 = 3\pi/2$ ή $\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{3\pi}{2}$ ή $t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{T}{4} + 2\frac{T}{4} = \frac{3T}{4}$

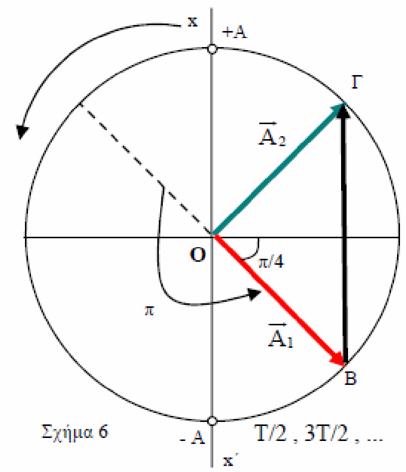
Η επόμενη χρονική στιγμή t_3 που θα είναι $d = 0$, το τρίγωνο ΟΒΓ θα βρίσκεται στη θέση του σχήματος 3 , και θα έχει περιστραφεί επί πλέον κατά π δηλαδή

$$t_3 = \frac{T}{4} + 2\frac{T}{4} + 2\frac{T}{4} = \frac{5T}{4} \text{ κλπ .}$$

Άρα τα έμβολα βρίσκονται **στο ίδιο ύψος κατά τις χρονικές στιγμές**

$$\underline{\underline{t_N = (2N+1)\frac{T}{4}}} \text{ , όπου } N = 0,1,2,3,4, \ldots \text{ και } T = 2\pi/\omega = 0{,}2 \text{ s.}$$

Β4. Σύμφωνα με τα προηγούμενα , η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των εμβόλων θα είναι μέγιστη όταν το τρίγωνο ΟΒΓ βρίσκεται στις θέσεις που φαίνονται στα σχήματα 5 και 6.



Σχήμα 6

Έτσι, για πρώτη φορά θα βρεθεί στη θέση του σχήματος 6 αφού περιστραφεί κατά π δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = T/2$, για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή $t = T/2+T = 3T/2$, για τρίτη τη χρονική στιγμή $t = 3T/2+T = 5T/2$ ...κλπ.

Στη θέση του σχήματος 5 θα βρίσκεται τις χρονικές στιγμές 0, Τ , 2Τ , 3Τ , ...

Δηλαδή η **μέγιστη κατακόρυφη απόσταση** των εμβόλων παρατηρείται **κατά τις χρονικές στιγμές**

$$\underline{\underline{t_k = k\frac{T}{2}}} \text{ , όπου } k = 0,1,2,3,4\ldots \text{ και } T = 0{,}2 \text{ s.}$$

Β5 . Είναι $d = x_2\text{-}x_1 = 0{,}1\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi t + \frac{5\pi}{4}\right) - 0{,}1\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ και με βάση την ταυτότητα

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ έχομε ότι}$$

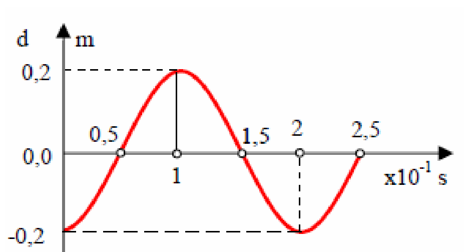
$$d = 2 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{2} \cdot ημ\left(\frac{10πt + \frac{5π}{4} - 10πt - \frac{3π}{4}}{2}\right) \cdot συν\left(\frac{10πt + \frac{5π}{4} + 10πt + \frac{3π}{4}}{2}\right) \text{ ή}$$

$$d = 0,2 \cdot \sqrt{2} \cdot ημ\frac{π}{4} \cdot συν(10πt + π) \text{ ή}$$

$$d = 0,2συν(10πt + π) \text{ ή}$$

$$d = -\,0,2 \cdot συν(\,10πt\,) \text{ στο SI.}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής , φαίνεται στο σχήμα 7 από το οποίο, προκύπτει ότι πράγματι είναι $d = 0$ κατά τις χρονικές στιγμές T/4, 3T/4 ,5T/4 ...(2N+1)T/4 , ...
και ότι $d = d_{max} = 0,2$ m κατά τις χρονικές στιγμές
0, T/2 , T, ...kT/2 , ...



Σχήμα 7

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης