

Υπολογισμός της περιόδου στην AAT και χρήση του κύκλου αναφοράς.

Σώμα εκτελεί α.α.τ και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε σημείο Σ_1 της τροχιάς του κινούμενο με θετική φορά ($v > 0$). Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 1,5$ s το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από το σημείο Σ_1 κινούμενο με αντίθετη φορά χωρίς να έχει περάσει από τη θέση ισορροπίας του. Τη χρονική στιγμή $t_3 = t_2 + 0,75$ s το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από σημείο Σ_2 της τροχιάς του το οποίο ισαπέχει από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με το Σ_1 . Να υπολογίσετε την περίοδο της α.α.τ.

ΛΥΣΗ

1^{ος} τρόπος

Επειδή δεν γνωρίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης της α.α.τ και δεν μπορούμε να την προσδιορίσουμε από τα δεδομένα υποθέτουμε ότι είναι της γενικής μορφής $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από την (1) $\Rightarrow x_1 = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{x_1}{A}$, επειδή $0 < x_1 < A$, θέτουμε $\eta\mu\theta = \frac{x_1}{A}$ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \omega t_1 + \varphi_0 = 2\kappa\pi + \theta \\ \omega t_2 + \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} - \frac{\varphi_0}{\omega} & (\text{όπου } v > 0) \\ t_2 = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} - \frac{\theta}{\omega} - \frac{\varphi_0}{\omega} & (2) \quad (\text{όπου } v < 0) \end{cases} \quad \text{με } \kappa = 0, 1, \dots$$

Για διαδοχικές διελεύσεις του σώματος από τη θέση Σ_1 αντιστοιχεί η ίδια τιμή της παραμέτρου κ , άρα:

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega} \Rightarrow 1,5 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega} \Rightarrow 1,5\omega = \pi - 2\theta \quad (3).$$

Τα σημεία $\Sigma_1(x_1)$ και $\Sigma_2(x_2)$ είναι συμμετρικά ως προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα $x_1 = -x_2$. Όταν το σώμα διέρχεται από στη θέση Σ_2 :

$$x_2 = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{x_2}{A} \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\frac{x_1}{A} \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \eta\mu(\pi + \theta) \Rightarrow \begin{cases} \omega t_3 + \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi + \theta \\ \omega t_3 + \varphi_0 = 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \quad \text{με } \kappa = 0, 1, \dots$$

$$\begin{cases} t_3 = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} - \frac{\varphi_0}{\omega} & (4) \\ t_3 = \frac{2\kappa\pi}{\omega} - \frac{\theta}{\omega} - \frac{\varphi_0}{\omega} \end{cases} \quad \text{Αλλά } \begin{cases} (v_3 = v_{\max} \sin(2\kappa\pi + \pi + \theta) < 0) \\ (v_3 = v_{\max} \sin(2\kappa\pi + \pi - \theta) > 0) \end{cases}$$

Επιλέγουμε την πρώτη οικογένεια λύσεων διότι όταν το σώμα πηγαίνει από τη θέση Σ_1 όπου $v_2 < 0$ "απευθείας" στη θέση Σ_2 θα είναι $v_3 < 0$.

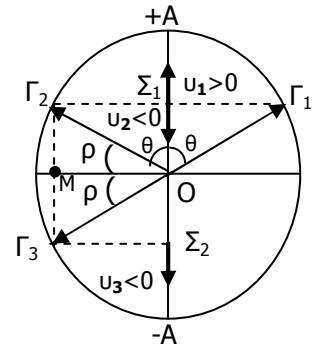
Από (2) και (4): $(t_3 - t_2) = \frac{2\theta}{\omega} \Rightarrow 0,75\omega = 2\theta$ (5). Από (3) και (5):

$$1,5\omega = \pi - 0,75\omega \Rightarrow 2,25\omega = \pi \Rightarrow 2,25 \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 4,5s$$

2^{ος} τρόπος

Με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα βρίσκεται στη θέση Σ_1 της τροχιάς του η θέση της επιβατικής ακτίνας που παρακολουθεί την ομαλή κυκλική κίνηση που αντιστοιχεί στην α.α.τ (ή του περιστρεφόμενου διανύσματος) είναι η Γ_1 . Αντίστοιχα όταν το σώμα περνάει για πρώτη φορά πάλι από το Σ_1 τη χρονική στιγμή t_2 κινούμενο με αντίθετη φορά, η επιβατική ακτίνα βρίσκεται στη θέση Γ_2 .



Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{O}\Sigma_1\Gamma_1}$ και $\overset{\Delta}{\text{O}\Sigma_1\Gamma_2}$ είναι ίσα, άρα $2\hat{\theta} = \omega(t_2 - t_1) \Rightarrow 2\hat{\theta} = 1,5\omega$ (1)

Όταν το σώμα χωρίς να αλλάξει φορά κίνησης βρεθεί στη θέση Σ_2 ($u_3 < 0$), η επιβατική ακτίνα θα βρίσκεται στη θέση Γ_3 .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{O}M\Gamma_2}$ και $\overset{\Delta}{\text{O}M\Gamma_3}$ είναι ίσα, άρα $2\hat{\rho} = \omega(t_3 - t_2) \Rightarrow 2\hat{\rho} = 0,75\omega$ (2).

$$\text{Αλλά } \hat{\theta} + \hat{\rho} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\hat{\theta} + 2\hat{\rho} = \pi \text{ (Τα σημεία } \Gamma_1 \text{ και } \Gamma_3 \text{ είναι αντιδιαμετρικά)} \xRightarrow{(1)} \xRightarrow{(2)}$$

$$1,5\omega + 0,75\omega = \pi \Rightarrow 2,25 \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 4,5s$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο ταλαντωτής σε θέσεις που ισαπέχουν από το κέντρο της ταλάντωσης (κέντρο του κύκλου) δηλαδή είναι συμμετρικές ως προς αυτό έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Αυτό αποδεικνύεται από τη γνωστή σχέση $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$. Το γεγονός ότι ο ταλαντωτής σε θέσεις που ισαπέχουν από τη θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητες ίδιου μέτρου γίνεται συχνά αιτία για την εξαγωγή του **λανθασμένου συμπεράσματος** ότι ο ταλαντωτής σε θέσεις με ανάλογες απομακρύνσεις π.χ x και $2x$ θα βρίσκεται αντίστοιχα στις χρονικές στιγμές t και $2t$ που προφανώς **δεν ισχύει διότι η κίνηση δεν είναι ομαλή**.

2. Το προηγούμενο λανθασμένο συμπέρασμα συνήθως «ενισχύεται» από το γεγονός ότι όταν ο ταλαντωτής αρχίζει την ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση $x=0$, σε χρονικά διαστήματα διάρκειας $\frac{T}{4}$ διανύει μήκος τροχιάς A .

3. Ίσως μια χρησιμότητα του κύκλου αναφοράς να είναι και το γεγονός ότι δίνει την δυνατότητα να γίνει

κατανοητό ότι το περιστρεφόμενο διάνυσμα διανύει γωνίες ανάλογες του χρόνου ($\varphi = \omega \cdot t$), αλλά τα ημίτονα αυτών των γωνιών ($\eta\mu\varphi$) και κυρίως οι απομακρύνσεις ($x = A\eta\mu\omega t$) **δεν είναι ανάλογες του χρόνου**.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης