

Στάσιμο σε χορδή με σταθερά άκρα

Μια χορδή με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της ένα στάσιμο κύμα με 2 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Η πρώτη κοιλία K_1 απέχει απόσταση $d=10\text{cm}$ από το αριστερό άκρο της χορδής και τη στιγμή που θεωρούμε $t=0$, έχει μέγιστη θετική ταχύτητα μέτρου $10\pi\text{ cm/s}$, ενώ τη στιγμή $t_1=0,6\text{s}$ η ταχύτητά της μηδενίζεται για δεύτερη φορά.

- Να υπολογιστεί το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας K_1 και το μήκος L της χορδής, το οποίο θεωρούμε ίσο με την απόσταση των δύο άκρων της.
- Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της κοιλίας K_1 , σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς και οι αντίστοιχες εξισώσεις $y=f(t)$ για τις υπόλοιπες κοιλίες που σχηματίζονται πάνω στη χορδή.
- Θεωρώντας την θέση της πρώτης κοιλίας K_1 , ως αρχή $x=0$, ενός προσανατολισμένου άξονα, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, που δημιουργείται πάνω στη χορδή και να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του στάσιμου τη στιγμή $t_2=(13/15)\text{s}$.
- Αν πάρουμε ως $t_0=0$, τη στιγμή που η κοιλία K_1 , έχει μηδενική ταχύτητα και θετική απομάκρυνση ($y>0$), ποια εξίσωση κύματος θα βρίσκαμε; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τις εξισώσεις $y=(x)$ για τα διάφορα σημεία της χορδής τις στιγμές:

$$\alpha) t_3=1,2\text{s} \text{ και } \beta) t_4=1,8\text{s}$$

σχεδιάζοντας και τα αντίστοιχα στιγμιότυπα.

Απάντηση:

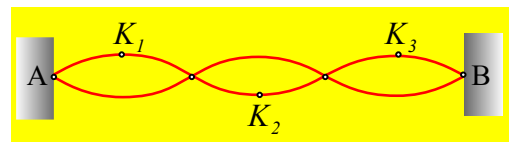
- Αν A το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας (δεν υπάρχει λόγος να ασχοληθούμε με τα αντίστοιχα πλάτη των κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο και να γράψουμε πλάτος $A'=2A$...) και $v_{\max}$ το πλάτος της ταχύτητας της κοιλίας, ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A \rightarrow A = \frac{v_{\max} T}{2\pi}$$

Αλλά αν το σημείο K_1 ξεκινά την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας, χρειάζεται χρόνο $\frac{1}{4}T$ για να φτάσει στην ακραία θέση ($y=+A$) και να μηδενιστεί η ταχύτητά του και επιπλέον χρόνο $\frac{1}{2}T$ για να φτάσει στην θέση $y=-A$, συνεπώς $t_1=3/4 T$ ή $T=0,8\text{s}$ και με αντικατάσταση:

$$A = \frac{v_{\max} T}{2\pi} = \frac{10\pi\text{ cm/s} \cdot 0,8\text{s}}{2\pi} = 4\text{cm}$$

Αν τώρα έχουμε δύο δεσμούς πάνω στη χορδή και δύο στα άκρα (σύνολο τέσσερις), τότε με βάση την εικόνα του σχήματος, η κοιλία K_1 απέχει $d=1/4\lambda$ από το άκρο A (δεσμός), οπότε $\lambda=4d=40\text{cm}$ και αφού η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών είναι $\lambda/2$, το μήκος $(AB)=L$ της χορδής είναι:



$$L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} = 3 \cdot \frac{40}{2}\text{cm} = 60\text{cm}$$

- ii) Η κοιλία K_1 εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση, αφού ξεκινάει για $t=0$ από την θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu\omega t = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 4 \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{0,8}t\right) = 4 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s}) \quad (1)$$

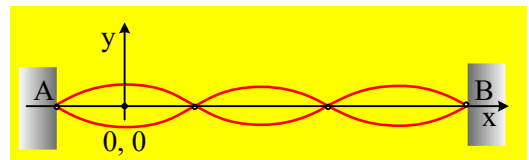
Η 2^η κοιλία K_2 παρουσιάζει διαφορά φάσης π με την K_1 , οπότε η αντίστοιχη εξίσωση της απομάκρυνσής της είναι:

$$y_2 = 4 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t + \pi\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s}) \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 4 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t - \pi\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

Ενώ η 3^η κοιλία K_3 είναι συμφασική με την K_1 , ικανοποιώντας την ίδια εξίσωση (1).

- iii) Παίρνοντας το σύστημα των αξόνων (x, y) , όπως στο σχήμα, βλέπουμε ότι στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία, όπου για $t=0$, $v>0$, συνεπώς ικανοποιείται η εξίσωση του στάσιμου, του σχολικού βιβλίου:



$$y = A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cdot \eta\mu(\omega t) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{40}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t\right) \rightarrow$$

$$y = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

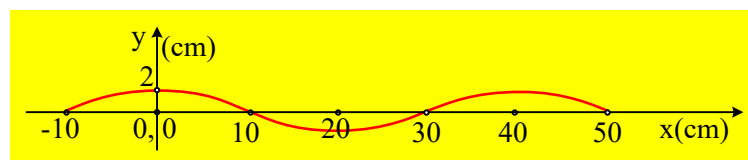
Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση $t=t_2$ παίρνουμε:

$$y = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} \cdot \frac{13}{15}\right) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$y = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s}) \quad (2)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2), έχει την μορφή:



- iv) Αν τη στιγμή $t=0$ το σημείο K_1 η κοιλία στην αρχή ($x=0$) του άξονα, βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση, η εξίσωση της απομάκρυνσής της θα έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, αρχική φάση η οποία θα «μεταφερθεί» και στην εξίσωση του στάσιμου κύματος η οποία θα πάρει την μορφή:

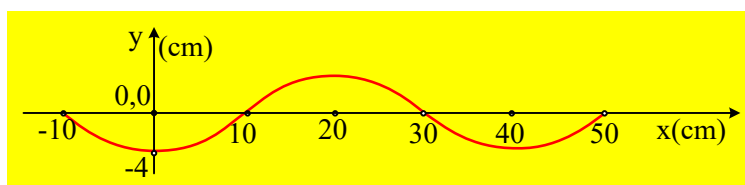
$$y' = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s}) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (3) $t=t_3=1,2\text{s}$, παίρνουμε για την απομάκρυνση των σημείων της χορδής, από την θέση ισορροπίας τους:

$$y'_3 = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}1,2 + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y'_3 = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \quad (x, y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

Με γραφική παράσταση:

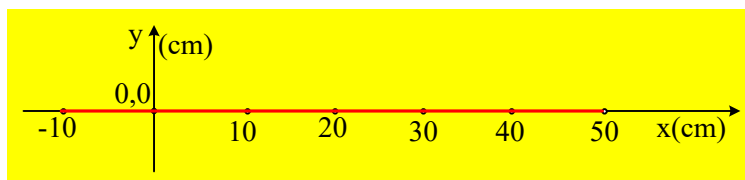


Ενώ για $t=t_4=1,8\text{s}$, θα πάρουμε:

$$y'_4 = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}1,8 + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu\left(4,5\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y'_4 = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cdot \eta\mu(5\pi) = 0$$

Και το στιγμιότυπο θα είναι:



dmargaris@gmail.com