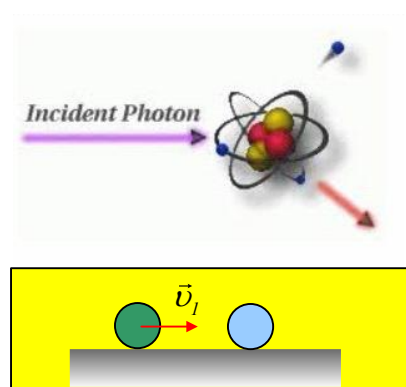


Φαινόμενο Compton – Ελαστική κρούση.

Ένα φωτόνιο μήκους κύματος $\lambda=1,2 \cdot 10^{-3} \text{nm}$, προσπίπτει σε ακίνητο ηλεκτρόνιο.

- i) Να υπολογιστεί η ενέργεια του φωτονίου (σε eV).
- ii) Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου.
- iii) Να υπολογισθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια και η αντίστοιχη ορμή του ηλεκτρονίου, μετά την αλληλεπίδραση.

Μια σφαίρα Α μάζας $m_1=0,1 \text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητα $v_1=6 \text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Β μάζας $m_2=0,2 \text{kg}$ η οποία είναι ακίνητη.



- iv) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας Β, μετά την κρούση. Η απάντηση να δοθεί σε J και σε eV. Ποιο είναι πιο βολικό αποτέλεσμα;
- v) Αν το αρχικό φωτόνιο αλληλεπιδράσει όχι με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, αλλά με ένα ακίνητο ελεύθερο πρωτόνιο, τι πρόβλεψη κάνετε για την κινητική ενέργεια και την ορμή που θα αποκτήσει, συγκρίνοντας τις τιμές με αυτές του ερωτήματος iii) για το ηλεκτρόνιο; Η απάντηση να δοθεί χωρίς να προβείτε σε ακριβείς υπολογισμούς.

Δίνεται $hc=1200 \text{eV} \cdot \text{nm}$, $\lambda_e=h/m_e c=2,4 \cdot 10^{-3} \text{nm}$, $c=3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ και $q_e=-1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου, είναι ίση:

$$E_o = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.200 \text{eV} \cdot \text{nm}}{1,2 \cdot 10^{-3} \text{nm}} = 10^6 \text{eV} = 1 \text{MeV}$$

- ii) Για το μήκος κύματος του φωτονίου μετά την σκέδαση ισχύει:

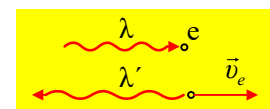
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο μήκος κύματος αντιστοιχεί σε γωνία εκτροπής του φωτονίου κατά 180° , οπότε $\cos \varphi = -1$ και έτσι από την (1) βρίσκουμε:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_e (1 - \cos \varphi) = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{nm} + 2,4 \cdot 10^{-3} \text{nm} (1 - (-1)) = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{nm}$$

- iii) Η ενέργεια του αρχικού φωτονίου είναι ίση με την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου, συν την κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο.

$$E_o = hf' + K_e \rightarrow E_o = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \rightarrow$$



$$K_e = 10^6 \text{ eV} - \frac{1.200 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{6 \cdot 10^{-3} \text{ nm}} = 10^6 \text{ eV} - 0,2 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,8 \text{ MeV}$$

Όπου η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι $E' = 0,2 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,2 \text{ MeV}$.

Σχόλιο:

Σε παρόμοιες ασκήσεις καλό είναι να μην ψάχνουμε ταχύτητα ηλεκτρονίου, ας μένουμε μόνο σε υπολογισμό της κινητικής ενέργειας, αφού συνήθως έχουμε ταχύτητες, όπου εμπλέκεται η θεωρία της σχετικότητας.

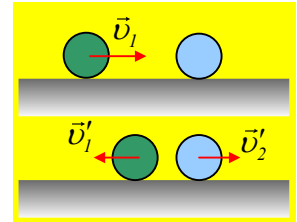
Από την διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu \rightarrow \frac{h}{\lambda} + 0 = -\frac{h}{\lambda'} + p'_e \rightarrow \frac{hf}{\lambda f} + 0 = -\frac{hf'}{\lambda' f'} + p'_e \rightarrow p'_e = \frac{E_0}{c} + \frac{E'}{c}$$

$$p'_e = \frac{10^6 \text{ eV} + 0,2 \cdot 10^6 \text{ eV}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ eV}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,4 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{10^2 \text{ m/s}} = 6,4 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

iv) Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2) \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3)$$



Με αντικατάσταση στην εξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 0,1}{0,1 + 0,2} 6 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$K'_2 = \frac{1}{2} m_2 v'_2{}^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 4^2 \text{ J} = 1,6 \text{ J}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, έχουμε:

$$K'_2 = 1,6 \text{ J} = \frac{1,6 \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 10^{19} \text{ eV}$$

Δέκα δισεκατομμύρια πακέτα, όπου κάθε πακέτο περιέχει 1 δισεκατομμύριο eV!!!

Ελπίζω η σύγκριση να κάνει φανερό γιατί χρησιμοποιούμε σαν μονάδα ενέργειας το 1J, στον μακρόκοσμο, αλλά το 1eV, στον μικρόκοσμο... Πόσο μη λειτουργικό θα ήταν να χρησιμοποιούμε την ίδια μονάδα πατού...

v) Αν για την αλληλεπίδραση φωτονίου- πρωτονίου πάρουμε την εξίσωση (1) και αντικαταστήσουμε τη μάζα του ηλεκτρονίου με την μάζα του πρωτονίου, θα πάρουμε:

$$\lambda'' - \lambda = \frac{h}{m_p c} (1 - \cos\varphi)$$

Αλλά αφού η μάζα του πρωτονίου είναι πολύ μεγαλύτερη, ας πούμε 2.000 φορές τη μάζα του ηλεκτρονίου (για την ακρίβεια $m_p = 1.836 m_e$), σημαίνει ότι η αύξηση του μήκους κύματος θα είναι 2.000 φορές μικρότερη από την αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση του ηλεκτρονίου.

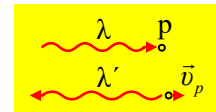
Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της ενέργειας του φωτονίου θα είναι πολύ μικρότερη και αντίστοιχα θα έχουμε το πρωτόνιο να αποκτά πολύ μικρότερη κινητική ενέργεια, αλλά πολύ μεγαλύτερη ορμή!!! Γιατί; Ας επιστρέψουμε στην κεντρική ελαστική κρούση να αντλήσουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα.

Τι συμβαίνει όταν η σφαίρα Β στο παραπάνω ερώτημα, έχει πολύ μεγάλη μάζα (λέμε όταν αυτή τείνει στο άπειρο...); Η σφαίρα Α επιστρέφει με ταχύτητα σχεδόν ίσου μέτρου ενώ η Β παραμένει σχεδόν ακίνητη. Ναι, αλλά αν θέλαμε να πούμε τι συμβαίνει με κινητική ενέργεια και ορμή της Β σφαίρας; Προφανώς η κινητική ενέργεια που μεταβιβάζεται στη Β σφαίρα είναι ελάχιστη, αλλά αντίθετα από ΑΔΟ βρίσκουμε:

$$\vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu \rightarrow m_1 v_1 + 0 = m_1 v'_1 + p'_2 \xrightarrow{v'_1 \approx -v_1} p'_2 = 2m_1 v_1 = 2p_1$$

Δηλαδή η ακίνητη σφαίρα με την μεγάλη μάζα, αποκτά διπλάσια ορμή από την αρχικά κινούμενη σφαίρα!

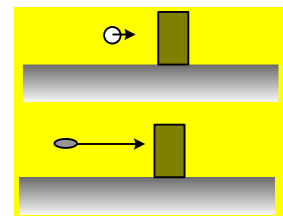
Το ίδιο θα συμβεί αν ένα φωτόνιο πέσει σε ένα **ελεύθερο** πρωτόνιο. Στην περίπτωση (για πιθανότητα μιλάμε...) που έχουμε «ανάκλαση» του φωτονίου, το σκεδαζόμενο θα έχει σχεδόν το ίδιο μήκος κύματος (ας δούμε το διπλανό σχήμα, συγκρίνοντάς το με το αντίστοιχο για το ηλεκτρόνιο, παραπάνω), ενώ το πρωτόνιο πρακτικά θα παραμείνει «ακίνητο», έχοντας όμως αποκτήσει διπλάσια ορμή από την ορμή του προσπίπτοντος φωτονίου.



Σχόλια για Καθηγητές:

- 1) Παραπάνω ακολουθήσαμε μια παράλληλη πορεία για την κεντρική ελαστική κρούση και το φαινόμενο Κόμπτον με «ανάκλαση» φωτονίου. Αυτό δεν πρέπει να μας κάνει να ταυτίσουμε το φαινόμενο Κόμπτον, ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο, όπου έχουμε αλληλεπίδραση δύο μικροσκοπικών οντοτήτων (φωτόνιο – ηλεκτρόνιο), με συμπεριφορά που ερμηνεύει η κβαντομηχανική, με την ελαστική κρούση όπου δύο σώματα του μακρόκοσμου, αλληλεπιδρούν μέσω δυνάμεων ελαστικότητας. Ακόμη και όταν μιλάμε για σκέδαση στον μικρόκοσμο, ταυτίζοντάς με την ελαστική κρούση, αναφερόμαστε για αλληλεπιδράσεις, όπως μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων, με εμφάνιση ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, από απόσταση.
- 2) Σε όλη τη μελέτη του φαινομένου Κόμπτον θεωρούμε ότι το φωτόνιο αλληλοεπιδρά με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, εφαρμόζοντας την ΑΔΟ. Αυτό δεν είναι αλήθεια. Το ηλεκτρόνιο δεν είναι ελεύθερο αλλά δεσμευμένο, όπως και όταν μελετάμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Τότε γιατί στη μια περίπτωση λαμβάνουμε υπόψη το ότι το ηλεκτρόνιο είναι δεσμευμένο και την άλλη όχι;

Ας δούμε κάτι ανάλογο με βάση το σχήμα, όπου έχουμε ένα κομμάτι ξύλου μάζας 1kg σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει τριβές. Τι θα συμβεί αν πάνω του πέσει ένα μπαλάκι Πινγκ - Πονγκ με ταχύτητα 1m/s και τι ένα βλήμα από πιστόλι με ταχύτητα 250m/s; Νομίζω όλοι καταλαβαίνουμε ότι στο πρώτο σχήμα το μπαλάκι ανακλάται χωρίς να μετακινηθεί το ξύλο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το ξύλο... εκτοξεύεται. Στην πρώτη περίπτωση η τριβή συγκρατεί το ξύλο, στη δεύτερη όχι, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέα την τριβή. Ανάλογα έχουμε εδώ στην περίπτωση που σε ένα δεσμευμένο ηλεκτρόνιο πέσει ένα φωτόνιο ορατού φωτός (μικρής ενέργειας) ή ένα φωτόνιο ακτίνων X (μεγάλης



ενέργειας). Το δεύτερο αντιστοιχεί στο βλήμα από πυροβόλο όπλο!!! Ένα φωτόνιο, όπως αυτό της άσκησης με ενέργεια 1MeV, δεν έχει πρόβλημα να ...εκτοξεύσει ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια -50eV ή ακόμη και 1keV...

- 3) Στο τελευταίο ερώτημα με το πρωτόνιο, θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει τη χρησιμοποίηση σκληρών ακτίνων X για την μελέτη φαινομένου Κόμπτον σε πρωτόνια. Αλλά η χρήση ακτίνων γ οδηγεί σε φαινόμενο δίδυμης γένεσης, αφού δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα πρωτόνια ... δεν γυρίζουν γύρω από το πυρήνα, αλλά βρίσκονται μέσα στο πυρήνα! Αν λάβουμε υπόψη δε τη μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο $\approx 8\text{MeV}$, καταλαβαίνουμε ότι μιλάμε για ... άλλα μεγέθη, για να προκληθεί διάσπαση πυρήνα...

dmargaris@gmail.com