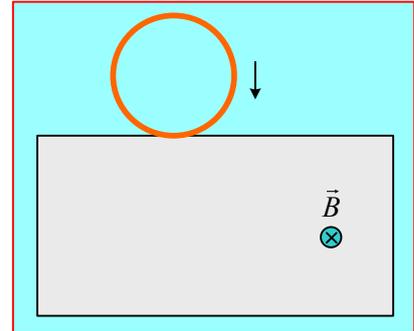
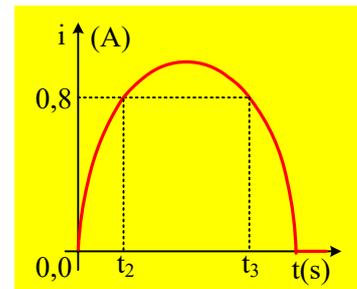


Ένας κυκλικός αγωγός μπαίνει σε μαγνητικό πεδίο.

Ένας κυκλικός αγωγός ακτίνας $a=0,25\text{m}$ και αντίστασης $R=0,5\Omega$ κινείται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα $v=0,5\text{m/s}$ και τη στιγμή $t=0$ αρχίζει να μπαίνει σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=2\text{T}$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές όπως στο σχήμα. Αν η είσοδος γίνεται πάντα με σταθερή ταχύτητα, με την επίδραση κατάλληλης κατακόρυφης δύναμης, ζητούνται:



- i) Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο τη χρονική στιγμή t_1 , που στο πεδίο έχει μόλις εισέλθει το κέντρο O του κυκλικού αγωγού, θεωρώντας την κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού, ίδιας κατεύθυνσης με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής, καθώς και η ένταση του ρεύματος, (κατά απόλυτο τιμή), η οποία τη στιγμή t_1 διαρρέει τον κυκλικό αγωγό. Ποια είναι η φορά της έντασης αυτής;
- iii) Η ισχύς της δύναμης Laplace που ασκείται στον κυκλικό αγωγό από το μαγνητικό πεδίο τη στιγμή t_1 .
- iv) Δίνεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος (κατά απόλυτο τιμή), που διαρρέει τον αγωγό, σε συνάρτηση με το χρόνο.



- α) Ποια είναι η μέγιστη ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό και ποια στιγμή αυτή μηδενίζεται; (Μας ενδιαφέρει μόνο η είσοδος στο πεδίο).
- β) Να αποδείξετε ότι τη στιγμή $t_2=0,2\text{s}$ η ένταση του ρεύματος γίνεται ίση με $0,8\text{A}$, για πρώτη φορά.
- γ) Ποια επόμενη χρονική στιγμή t_3 η ένταση του ρεύματος ξαναγίνεται $0,8\text{A}$.

Απάντηση:

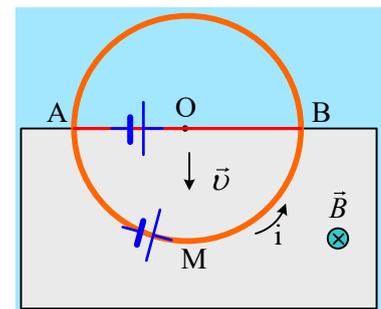
- i) Έστω ότι τη στιγμή t_1 έχει μόλις εισέλθει στο πεδίο, το κέντρο O του κυκλικού αγωγού άρα και η αντίστοιχη διάμετρος AB , όπως στο σχήμα. Τότε μέσα στο πεδίο έχουμε ένα ημικύκλιο και η ζητούμενη ροή είναι:

$$\Phi_1 = BA = B \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 0,25^2 \text{ Wb} = 0,0625\pi \text{ Wb} \approx 0,2 \text{ Wb}$$

- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια του κυκλικού αγωγού, είναι κατά απόλυτο τιμή ίση και με την εμφανιζόμενη ΗΕΔ από επαγωγή στο τόξο AMB , του κύκλου, λόγω κίνησής του μέσα στο πεδίο. Δηλαδή ισχύει για τη στιγμή t_1 :

$$E_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} \rightarrow |E_1| = \frac{d\Phi_1}{dt}$$

Ναι, αλλά πώς βρίσκουμε την παραπάνω παράγωγο; Απλά την αποφεύγουμε (για ευκολία...), εστιάζοντας

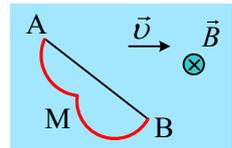


στο αντίστοιχο τόξο. Έστω τώρα ότι συνδέουμε τα σημεία Α και Β, τα άκρα της διαμέτρου, με ένα ευθύγραμμο σύρμα, οπότε παίρνουμε ένα πλαίσιο, το ΑΒΜΑ. Το πλαίσιο αυτό έχει σταθερό εμβαδόν οπότε η ροή παραμένει σταθερή και η συνολική ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται πάνω του είναι μηδενική.

Κατά συνέπεια:

$$E_{ολ} = 0 \rightarrow E_{AB} + E_{BMA} = 0 \rightarrow E_{AB} - E_{AMB} = 0 \rightarrow E_{AMB} = E_{AB} = Bv(AB) \rightarrow E_{AMB} = E_I = Bv \cdot 2a = 2 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,25V = 0,5V$$

Σημείωση: Η παραπάνω πορεία εύρεσης της ΗΕΔ σε μη ευθύγραμμο αγωγό με τυχαίο σχήμα, καλό είναι να την κρατήσουμε. Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο αγωγό ΑΜΒ, είναι ίση με την ΗΕΔ στον ευθύγραμμο αγωγό με τα ίδια άκρα ΑΒ.

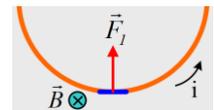


Αλλά τότε τη στιγμή αυτή το πλαίσιο (ο κυκλικός αγωγός) διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I_I = \frac{E_I}{R} = \frac{0,5V}{0,5\Omega} = 1A$$

Όσον αφορά τη φορά της έντασης, αυτή προκύπτει με βάση τον κανόνα του Lenz, από το Α στο Β, όπως στο σχήμα. Κατά την είσοδο το πεδίο η μαγνητική ροή αυξάνεται, οπότε το ρεύμα από επαγωγή έχει τέτοια φορά, ώστε να δημιουργηθεί ένα δεύτερο μαγνητικό πεδίο με δυναμικές γραμμές προς τον αναγνώστη, αντίθετης φοράς, από τη φορά των δυναμικών γραμμών του εξωτερικού πεδίου Β.

Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε τη δύναμη Laplace σε ένα μικρό τμήμα γύρω από το Μ. Αυτή θα έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας, οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε τη φορά της έντασης.



iii) Μέσω της δύναμης Laplace η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα, οπότε έχουμε:

$$P_{F_L} = -P_{ηλ} = -E_I \cdot I_I = -0,5V \cdot 1A = -0,5W$$

Όπου η ισχύς αυτή της δύναμης είναι αρνητική, μιας και αφαιρείται μηχανική ενέργεια από τον αγωγό.

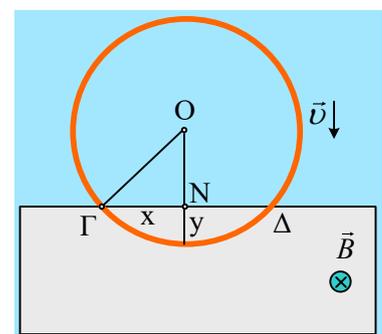
iv) Με βάση τα παραπάνω κάθε στιγμή αναπτύσσεται στον κυκλικό αγωγό ΗΕΔ από επαγωγή ίση με $E = Bv l$, όπου l το μήκος της χορδής που αντιστοιχεί στο τόξο που κινείται μέσα στο πεδίο.

α) Η ΗΕΔ από επαγωγή είναι μέγιστη όταν η χορδή ΓΔ είναι μέγιστη, πράγμα που συμβαίνει τη στιγμή t_1 όπου $E_1 = E_{max} = 0,5V$, οπότε και η ένταση γίνεται μέγιστη (πάντα κατά απόλυτο τιμή), με $I_1 = I_{max} = 1A$.

Εξάλλου η είσοδος ολοκληρώνεται όταν η κατακόρυφη μετατόπιση του πλαισίου γίνει ίση με την διάμετρο:

$$v = \frac{2a}{\Delta t_{εισ}} \rightarrow t_{εισ} = \frac{2a}{v} = \frac{2 \cdot 0,25}{0,5} s = 1s$$

Αυτή είναι και η χρονική στιγμή μηδενισμού της έντασης, αφού τότε σταθεροποιείται και η μαγνητική



ροή που περνά από το πλαίσιο.

β) Τη στιγμή t_2 το πλαίσιο έχει εισέλθει στο πεδίο κατά $y=vt_2=0,5 \cdot 0,2m=0,1m$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα $(ON)=a-y$ και από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $NO\Gamma$ παίρνουμε:

$$(N\Gamma)^2 = (GO)^2 - (ON)^2 \rightarrow x = \sqrt{a^2 - (a-y)^2} = \sqrt{0,25^2 - (0,25-0,1)^2} m \rightarrow$$

$$x = \sqrt{0,0625 - 0,0225} m = \sqrt{0,04} m = 0,2m$$

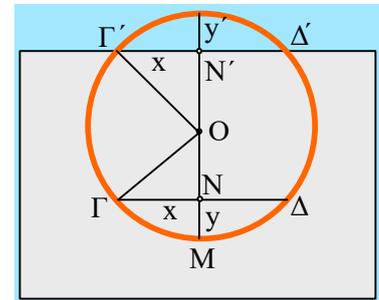
Οπότε με βάση τα προηγούμενα, για τη στιγμή αυτή θα έχουμε:

$$I_2 = \frac{E_2}{R} = \frac{Bvl}{R} = \frac{Bv \cdot 2x}{R} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,2}{0,5} A = 0,8 A$$

γ) Κοιτάζοντας τη μορφή του διαγράμματος $i=i(t)$, μπορούμε να διακρίνουμε ότι είναι συμμετρική άρα η στιγμή t_3 **πρέπει** να είναι $0,2s$, πριν την πλήρη είσοδο, δηλαδή $t_3 = t_{εισ} - t_2 = 1s - 0,2s = 0,8s$. Είναι έτσι;

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, η ένταση του ρεύματος θα ξαναγίνει $0,8 A$, όταν το μήκος της χορδής γίνει ξανά $2x=0,4m$, όπως στο σχήμα. Βέβαια από την Γεωμετρία προκύπτει ότι $(ON')=(ON)$ (ίσα ορθογώνια τρίγωνα $NO\Gamma$ και $N'\Gamma'O$), οπότε και $y'=y$. Αλλά τότε η μετατόπιση εντός του πεδίου είναι ίση με:

$$\Delta y = (MN') = \delta - y' = 2a - y = 0,5m - 0,1m = 0,4m.$$



Έτσι θα έχουμε:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta y}{v} = \frac{0,4m}{0,5m/s} = 0,8s \rightarrow t_3 - t_0 = 0,8s \rightarrow t_3 = 0,8s$$

dmargaris@gmail.com