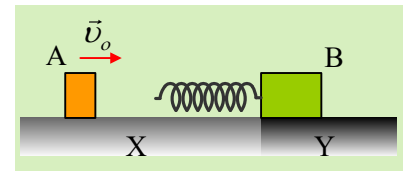


Θα γλιστρήσει, δεν θα γλιστρήσει;

Ένα σώμα A μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο X με σταθερή ταχύτητα $v_0=3\text{m/s}$, κατευθυνόμενο προς ένα σώμα B, το οποίο ηρεμεί σε μια περιοχή Y του επιπέδου, η οποία δεν είναι λεία, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται τριβές. Στο σώμα B έχει προσκολληθεί ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και το σώμα A κινείται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Αν τη στιγμή $t_0=0$ το σώμα A έρχεται σε επαφή με το ελατήριο το οποίο αρχίζει να συσπειρώνει, ζητούνται:



- i) Ποια η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν το σώμα B παραμένει ακίνητο στη θέση του;
- ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής που ασκείται στο σώμα B σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iii) Αν το σώμα B έχει μάζα $M=4\text{kg}$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος B και του επιπέδου Y, ώστε αυτό να παραμένει ακίνητο.
- iv) Αν το σώμα B έχει μάζα $M_1=2,5\text{kg}$, ενώ παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστή τριβής $\mu_1=0,8$, να υπολογιστεί η ταχύτητα v_1 του σώματος A, τη στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση του σώματος B.

Θεωρήσετε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, η οριακή τριβή, ίση με την τριβή ολίσθησης, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Αν O είναι το άκρο του ελατηρίου, το σημείο αυτό είναι και η θέση ισορροπίας για την ΑΑΤ που θα εκτελέσει το σώμα A, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο και δέχεται από αυτό δύναμη της μορφής $F=-kx$. Αλλά τότε η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας θα είναι της μορφής $x = A\eta\mu(\omega t)$, αφού δεν έχουμε αρχική φάση. Αλλά τότε η ταχύτητα v_0 είναι το πλάτος της ταχύτητας, οπότε για το πλάτος ταλάντωσης θα έχουμε:

$$v_0 = \omega A \quad \text{όπου} \quad \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{100/1} \text{rad/s} = 10 \text{rad/s} \rightarrow$$

$$A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{3 \text{m/s}}{10 \text{rad/s}} = 0,3 \text{m}$$

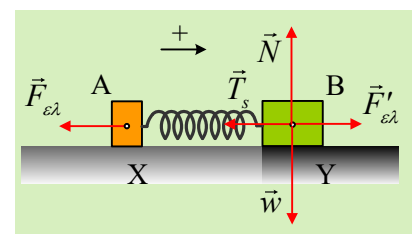
- ii) Στη διάρκεια της ΑΑΤ, το σώμα A δέχεται δύναμη επαναφοράς από το ελατήριο με αλγεβρική τιμή:

$$\Sigma F = F_{ελ} = -kx = -k \cdot A\eta\mu(\omega t)$$

Όπου το (-) σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά (προς τα αρνητικά), όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το ελατήριο ασκεί στο σώμα

B, δύναμη $F'_{ελ} = kx$, του ίδιου μέτρου με φορά προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα να ασκηθεί σε αυτό και δύναμη στατικής τριβής, όπως στο σχήμα, με αλγεβρική τιμή ίδια με την $\vec{F}_{ελ}$, για να εξασφαλιζεται η ισορροπία του σώματος B. Συνεπώς η εξίσωση της ασκούμενης τριβής είναι της μορφής:

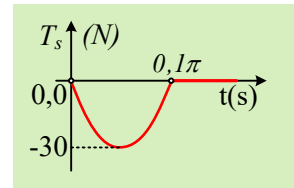
$$T_s = -k \cdot A\eta\mu(\omega t) = -100 \cdot 0,3 \cdot \eta\mu(10t) = -30 \cdot \eta\mu(10t) \quad (S.I.)$$



Η παραπάνω τριβή θα ασκηθεί στο σώμα Β, για μισή περίοδο, αφού τόσο χρόνο θα κάνει το σώμα Α να εγκαταλείψει το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους του. Δηλαδή μέχρι τη στιγμή:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} = 0,1\pi \text{ s}$$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζουμε το διάγραμμα $T_s = f(t)$, όπως στο διπλανό σχήμα.



iii) Με βάση τα παραπάνω, το μέγιστο μέτρο της ασκούμενης δύναμης από το ελατήριο έχει μέτρο 30N, συνεπώς για να έχουμε ακινησία η ασκούμενη τριβή πρέπει να είναι στατική με μέτρο:

$$T = |F_{ελ,max}| \leq T_{s,max} \quad \text{ή} \quad \mu_s N \geq |F_{ελ,max}| \rightarrow \mu_s \geq \frac{|F_{ελ,max}|}{Mg} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{30N}{40N} \rightarrow \mu_s \geq 0,75$$

Οπότε ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής (αλλά και τριβής ολίσθησης) είναι $\mu_s = \mu = 0,75$.

iv) Τη στιγμή που το σώμα Β αρχίζει οριακά να γλιστρά, η τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $T = F_{ελ}$, ενώ το σώμα έχει απομάκρυνση x_1 και ταχύτητα v_1 , προς τα δεξιά (πριν φτάσει σε θέση πλάτους).

$$\mu_1 M_1 g = kx_1 \rightarrow x_1 = \frac{\mu_1 M_1 g}{k} = \frac{0,8 \cdot 2,5 \cdot 10}{100} \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την διατήρηση ενέργειας για την ταλάντωση του σώματος Α, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= E_\tau = E_0 \rightarrow \\ \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow \\ v_1 &= +\sqrt{v_0^2 - \frac{k x_1^2}{m}} = \sqrt{3^2 - \frac{100 \cdot 0,2^2}{1}} \text{ m/s} = \sqrt{9 - 4} \text{ m/s} = \sqrt{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Πήραμε θετική ταχύτητα αφού η ολίσθηση θα προκύψει καθώς το Α σώμα κινείται προς τα δεξιά.

dmargaris@gmail.com