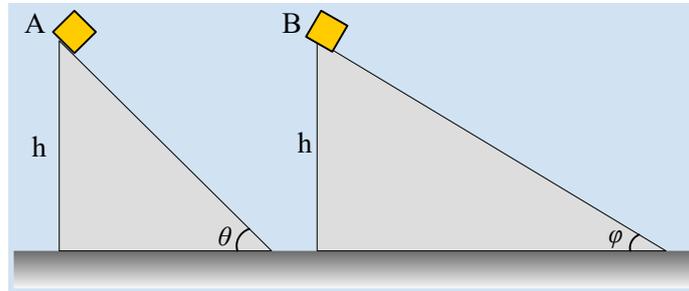


Κινήσεις σε δύο κεκλιμένα επίπεδα.

Δύο σώματα A και B με μάζες m_1 και $M=2m_1$ αντίστοιχα, αφήνονται από το ίδιο ύψος h να κινηθούν κατά μήκος δύο λείων κεκλιμένων επιπέδων με κλίσεις $\theta > \varphi$, όπως στο σχήμα.

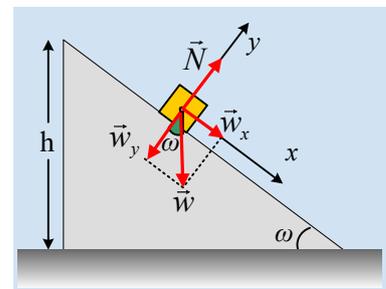


- i) Ποιο σώμα θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση και γιατί;
- ii) Να αποδείξετε ότι το σώμα A θα φτάσει πρώτο στο οριζόντιο επίπεδο.
- iii) Αν W_1 το έργο του βάρους του σώματος A, μέχρι να φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο και W_2 το αντίστοιχο έργο για το σώμα B, να αποδείξετε ότι $W_2=2W_1$.
- iv) Ποιο σώμα φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο με μεγαλύτερη ταχύτητα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Παρακάτω θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος κατά μήκος ενός τυχαίου κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως ω και τα αποτελέσματα θα τα μεταφέρουμε στα σώματα A και B.

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει ένα σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο και τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Με ανάλυση του βάρους σε δυο συνιστώσες μια παράλληλη και μια κάθετη στο επίπεδο (άξονες x και y), λαμβάνοντας υπόψη ότι η γωνία μεταξύ βάρους και άξονα y, είναι ίση με τη γωνία ω του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:



$$\Sigma F_x = ma \rightarrow w_x = ma \rightarrow w \cdot \eta\mu\omega = ma \rightarrow mg \cdot \eta\mu\omega = ma \rightarrow a = g \cdot \eta\mu\omega$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει, ότι η επιτάχυνση του σώματος δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος, αλλά μόνο από την κλίση ω του επιπέδου. Συνεπώς το σώμα A που βρίσκεται σε επίπεδο με μεγαλύτερη γωνία ($\theta > \varphi$), συνεπώς και $\eta\mu\theta > \eta\mu\varphi$, θα αποκτήσει και μεγαλύτερη επιτάχυνση, δηλαδή για τις δύο επιταχύνσεις θα έχουμε $a_1 > a_2$.

- ii) Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κατά μήκος του επιπέδου όπου η μετατόπισή του $\Delta x = x = l$, όπου l το μήκος του επιπέδου. Αλλά $\eta\mu\omega = \frac{h}{l} \rightarrow l = \frac{h}{\eta\mu\omega}$, οπότε έχουμε:

$$\Delta x = l = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \frac{h}{\eta\mu\omega} = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu\omega \cdot t^2 \rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2h}{g\eta\mu^2\omega}} = \frac{1}{\eta\mu\omega} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

Οπότε αφού $\eta\mu\theta > \eta\mu\varphi$ τότε $t_1 < t_2$. Το Α σώμα θα φτάσει πρώτο στο οριζόντιο επίπεδο.

iii) Για το έργο του βάρους κατά μήκος του επιπέδου, με κλίση ω έχουμε:

$$W_w = W_{w_x} + W_{w_y} = mg \cdot \eta\mu\omega \cdot l \cdot \sin 0^\circ + mg \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot l \cdot \sin 90^\circ \xrightarrow[l=h/\eta\mu\omega]{\sin 90^\circ=1}$$

$$W_w = mg \cdot \eta\mu\omega \cdot \frac{h}{\eta\mu\omega} = mgh$$

Συνεπώς για τα δυο έργα θα έχουμε:

$$W_1 = m_1gh \quad \text{και} \quad W_2 = Mgh = 2m_1gh \rightarrow$$

$$W_2 = 2W_1$$

iv) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) του σώματος για την κίνησή του κατά μήκος του επιπέδου:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_N \xrightarrow{W_N=0}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Βλέπουμε ότι η ταχύτητα με την οποία ένα σώμα φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο, δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος, ούτε από την κλίση του επιπέδου. Συνεπώς και τα δυο σώματα θα φτάσουν στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες με το ίδιο μέτρο.

dmargaris@gmail.com