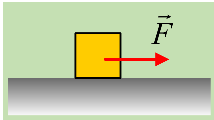
Η ΑΔΟ και η διατήρηση της μαγνητικής ροής

Ας ακολουθήσουμε ένα μονοπάτι, διερευνώντας ομοιότητες μεταξύ της μελέτης κίνησης υλικού σημείου και ενός κυκλώματος που περιλαμβάνει αυτεπαγωγή. Μην φοβηθείτε να το ακολουθείστε, δεν πρόκειται να καταλήξει στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις!!!

Εφαρμογή 1η :

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα μάζας 2kg. Σε μια στιγμή δέχεται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=1N, Να μελετηθεί η κίνηση και να γίνει η γραφική παράσταση υ=υ(t), μέχρι τη στιγμή t=10s, αν η δύναμη σταματά να ασκείται στο σώμα τη στιγμή t_1=6s.

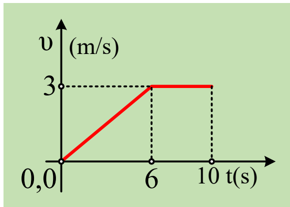


Απάντηση:

Προφανώς δεν χρειάζεται πολύ ανάλυση, ένα θέμα Α΄ Λυκείου, αφού ο 2ος νόμος του Νεύτωνα συνδέει την (συνισταμένη) δύναμη με την επιτάχυνση, το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \to F = ma \to a = \frac{F}{m} = \frac{1N}{2kg} = 0{,}5m/s^2 \xrightarrow{t=6s}$$

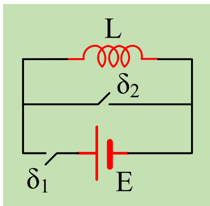
$$\upsilon_1 = at_1 = 0{,}5 \cdot 6m/s = 3m/s$$



Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη, το σώμα κινείται πια με σταθερή ταχύτητα. Στο σχήμα βλέπουμε το ζητούμενο διάγραμμα.

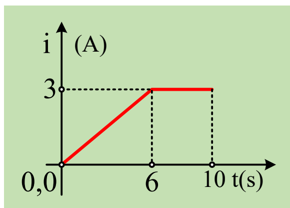
Εφαρμογή 2η :

Ένα ιδανικό πηνίο με αυτεπαγωγή L=0,4Η συνδέεται όπως στο κύκλωμα με ιδανική πηγή ΗΕΔ Ε=0,2V. Τη στιγμή t_0=0 κλείνουμε το διακόπτη δ_1 και τη στιγμή t_1=6s τον ανοίγουμε κλείνοντας ταυτόχρονα τον διακόπτη δ_2. Να μελετηθεί το κύκλωμα και να γίνει η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο σε συνάρτηση με το χρόνο, i=i(t), μέχρι τη στιγμή t_2=10s.



Απάντηση:

Μόλις κλείσουμε το διακόπτη δ_1 το πηνίο αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα και ο 2ος κανόνας του Kirchhoff μας δίνει $E - L\frac{di}{dt} = 0 \to \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{0{,}2V}{0{,}4H}A/s = 0{,}5\,A/s$.

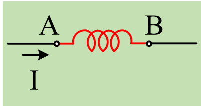


Ο παραπάνω ρυθμός παραμένει σταθερός, άρα η ένταση του ρεύματος είναι ανάλογη του χρόνου και τη στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$i_1 = \left(\frac{di}{dt}\right)t = 0{,}5 \cdot 6A = 3A$$

Μετά τη στιγμή t_1 το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης, αφού δεν υπάρχει κάποια τάση στα άκρα του η οποία να προσπαθεί να μεταβάλλει την ένταση που το διαρρέει. Έτσι η γραφική παράσταση παίρνει τη μορφή του παραπάνω σχήματος.

Σχόλιο:



Αξίζει να δούμε λίγο παραπάνω τις αναλογίες στις δύο παραπάνω εφαρμογές. Η δύναμη είναι αυτή που προκαλεί την κίνηση του σώματος (επιταχύνοντάς το), ενώ η τάση $E=V_{AB}$, είναι η αιτία για να αρχίσει το πηνίο να διαρρέεται από ρεύμα. Το σώμα λόγω μάζας (αδράνειας) αντιστέκεται στην αλλαγή της κινητικής του κατάστασης, στην αλλαγή της ταχύτητάς του. Το πηνίο λόγω αυτεπαγωγής (L) αντιστέκεται στην μεταβολή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει! Θέλουμε να γράψουμε διαφορικές; Τις έχουμε ήδη γράψει σαν 2ους νόμους!!!

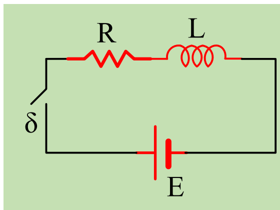
$$F - m\frac{dυ}{dt} = 0 \qquad και \quad E - L\frac{di}{dt} = 0$$

Ένα ιδανικό πηνίο, όπως το παραπάνω για t > 6s θα διαρρέεται από σταθερή ένταση ρεύματος για πάντα!!! Όπως για πάντα θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά το σώμα της 1ης εφαρμογής στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Αν τώρα στο πηνίο του σχήματος $V_{AB} > 0$, τάση που επιβάλλεται στο πηνίο, τότε $V_{AB} = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} > 0$ και η ένταση του ρεύματος αυξάνεται, αν $V_{AB} < 0$, τότε $V_{AB} = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} < 0$ και η ένταση του ρεύματος μειώνεται, ενώ όταν $V_{AB} = 0$, η ένταση του ρεύματος παραμένει σταθερή.

Ας πάμε τώρα ένα βήμα παρακάτω, αλλά με αντίστροφη σειρά, πρώτα ηλεκτρομαγνητισμός.

Εφαρμογή 3η :



Το πρόβλημα είναι μια απλή άσκηση αυτεπαγωγής. Στο κύκλωμα E=10V, L=20mH και R=2Ω. Αν για t=0 κλείσουμε το διακόπτη, να βρεθεί η εξίσωση i=i(t) της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Απάντηση:

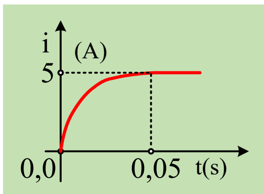
Από τον 2ο κανόνας του Kirchhoff, αφού κλείσουμε το διακόπτη, παίρνουμε:

$$E - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri - E = 0\,. \ (1)$$

Η παραπάνω διαφορική μας δίνει εξίσωση έντασης:

$$i = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow$$

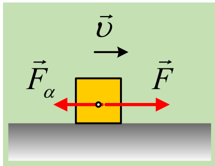
$$i = 5\left(1 - e^{-100t}\right) \quad (S.I.)$$



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, όπου θεωρούμε ότι η σταθεροποίηση του ρεύματος γίνεται σε χρόνο t=5τ=$5\,{}^{L}\!/_{R}$=0,05s.

Εφαρμογή 4η :

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα μάζας m=0,4kg. Τη στιγμή t_0=0, το σώμα δέχεται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=1N. Αν κατά την κίνηση το σώμα δέχεται δύναμη αντίστασης $F_\alpha=-b\upsilon=-0{,}2\cdot\upsilon$ (S.I.), να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.



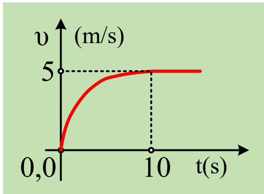
Απάντηση:

Η αντίστοιχη διαφορική (ο 2ος νόμος του Νεύτωνα) τώρα γράφεται:

$$F-b\upsilon=m\frac{d\upsilon}{dt}\rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt}+b\upsilon-F=0 \quad (2)$$

Η παραπάνω εξίσωση (2) είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση (1) για το κύκλωμα. Συνεπώς κατά αναλογία η λύση της είναι:

$$\upsilon=\upsilon_{max}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)=\frac{F}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)\rightarrow$$
$$\upsilon=5\left(1-e^{-0,5t}\right) \quad (S.I.)$$



Ξανά στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης της ταχύτητας, όπου θεωρούμε ότι η σταθεροποίηση ταχύτητας γίνεται σε χρόνο t=5τ=$5\,{}^{m}\!/_{b}$=10s.

Σχόλιο:

Νομίζω ότι εδώ μπορούμε να κάνουμε μια στάση, για κάποια συμπεράσματα. Υπάρχει μια πλήρης αναλογία, τόσο στις μαθηματικές εξισώσεις, όσο και στη φυσική ερμηνεία, της κίνησης ενός σώματος με την επίδραση μιας σταθερής δύναμης και της διέλευσης ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που περιλαμβάνει ένα ιδανικό πηνίο, πηγή και πιθανόν αντίσταση. Οπότε με βάση τις αναλογίες που προέκυψαν παραπάνω μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα.

Μηχανική	**Ηλεκτρομαγνητισμός**
Δύναμη (F)	ΗΕΔ (E)
Μάζα (m)	Αυτεπαγωγή (L)
Ταχύτητα (υ)	ένταση ρεύματος (i)
Επιτάχυνση (α)	Ρυθμός $\frac{di}{dt}$
Τριβή (F_α)	Αντίσταση (R)

Εφαρμογή 5η :

Ας επανέρθουμε τώρα στο σώμα της 4ης εφαρμογής, όπου μετά την απόκτηση της οριακής ταχύτητάς του, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_1=0,6kg. Το συσσωμάτωμα συνεχίζει στο ίδιο επίπεδο με την επίδραση των ίδιων δυνάμεων, όπως και πριν την κρούση. Αφού γράψετε την διαφορική για την κίνηση μετά την κρούση να κάνετε ένα ποιοτικό νέο διάγραμμα της ταχύτητας (πριν και μετά την κρούση) σε συνάρτηση με το χρόνο.

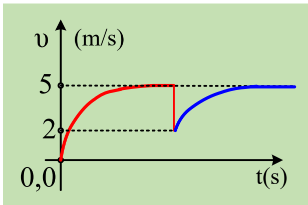
Απάντηση:

Η διαφορική εξίσωση τώρα είναι ίδια με πριν, με μόνη διαφορά ότι η μάζα πλέον του σώματος γίνεται $M=m+m_1$, οπότε θα έχουμε:

$$M\frac{d\upsilon}{dt}+b\upsilon-F=0$$

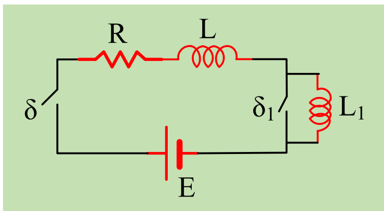
Συνεπώς έχουμε την ίδια μορφή κίνησης με την ίδια οριακή ταχύτητα, όπου απλά πρέπει να λάβουμε υπόψη την κοινή ταχύτητα μετά την κρούση. Και αυτή θα προκύψει από την ΑΔΟ, την διατήρηση της ορμής, στη διάρκεια της κρούσης:

$$m\upsilon_{o\rho}+0=(m+m_1)\upsilon_\kappa \rightarrow \upsilon_\kappa=\frac{m\upsilon_{o\rho}}{m+m_1}=\frac{0,4\cdot 5}{0,4+0,6}m/s=2m/s$$



Έτσι ένα ποιοτικό διάγραμμα (για να μην χρειαστεί να κάνουμε υπολογισμούς χρονικών στιγμών) θα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος, όπου το μπλε τμήμα του διαγράμματος είναι μετά την κρούση.

Εφαρμογή 6η :



Έστω τώρα ότι έχουμε τροποποιήσει το κύκλωμα της 3ης εφαρμογής, όπως στο σχήμα, όπου το δεύτερο πηνίο, επίσης ιδανικό έχει αυτεπαγωγή L_1=30mH ενώ ο διακόπτης δ_1 είναι αρχικά κλειστός (συνεπώς το πηνίο βραχυκυκλωμένο). Τη στιγμή t=0 κλείνουμε και το διακόπτη δ και αφού σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος στη μέγιστη τιμή του I_{max}=5A, ανοίγουμε τον διακόπτη δ_1. Αφού γράψετε την διαφορική για την ένταση του ρεύματος μετά το άνοιγμα του διακόπτη δ_1, να κάνετε ένα ποιοτικό νέο διάγραμμα της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τη πηγή σε συνάρτηση με το χρόνο.

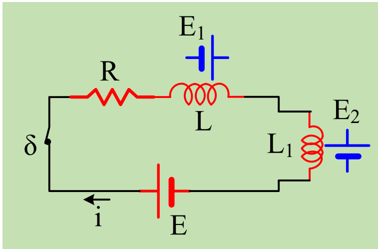
Απάντηση:

Ξανά από τον 2ο κανόνας του Kirchhoff, μετά το άνοιγμα του διακόπτη δ_1, παίρνουμε:

$$E-iR-L\frac{di}{dt}-L_1\frac{di}{dt}=0 \rightarrow (L+L_1)\frac{di}{dt}+Ri-E=0 \quad (1a).$$

Η εξίσωση (1α), ίδια με την (1), απλά με συντελεστή αυτεπαγωγής $L_{o\lambda}=L+L_1$ προφανώς θα δίνει την ίδια λύση, που θα καταλήγει στην ίδια τελική οριακή ένταση ρεύματος $I_{max} = \frac{E}{R} = 5A$. Το ερώτημα είναι «ποια είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα (και την πηγή), μόλις ανοίξουμε το διακόπτη $δ_1$; Τα δύο πηνία διαρρέονται από την ίδια ή από διαφορετική ένταση ρεύματος;»

Ας δούμε λίγο τι συμβαίνει στην πλαστική κρούση παραπάνω. Στη διάρκειά της ασκούνται μεταξύ των σωμάτων πολύ ισχυρές δυνάμεις αλληλεπίδρασης, οι οποίες μεταβάλλουν «ακαριαία» τις δυο ταχύτητες. Προσοχή στο σύστημα ασκούνται ακόμη και οι εξωτερικές δυνάμεις F και $F_α$, τη δράση των οποίων αγνοούμε στη διάρκεια της κρούσης, αφού τις θεωρούμε αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης. Με άλλα λόγια ενώ λόγω αδράνειας για να μεταβληθεί η ταχύτητα ενός σώματος απαιτείται άσκηση δύναμης για κάποιο χρονικό διάστημα, αν οι δυνάμεις γίνουν τεράστιες, η μεταβολή μπορεί να διαρκέσει απειροελάχιστα.



Οπότε μετά από αυτό, ας έρθουμε στο ηλεκτρικό κύκλωμα. Ποια είναι η αιτία για την αύξηση του ρεύματος που θα αρχίσει να ρέει μέσω του πηνίου L_1. Στο πρώτο σχόλιο είπαμε ότι η τάση στα άκρα του πηνίου επιβάλει την μεταβολή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει. Συνεπώς εδώ θα πρέπει να αναπτύσσονται τεράστιες ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα πηνία, μόλις ανοίξουμε το διακόπτη. Το ανάλογο της ανάπτυξης τεράστιων δυνάμεων στην πλαστική κρούση! Στο διπλανό σχήμα, έχουν σημειωθεί οι δυο ΗΕΔ που αναπτύσσονται στα δύο πηνία, στη διάρκεια του απειροελάχιστου χρόνου που απαιτείται ώστε να αποκατασταθεί κοινή ένταση ρεύματος που να διαρρέει τα δύο πηνία, ΗΕΔ με αντίθετη πολικότητα, αντίστοιχες των εσωτερικών δυνάμεων στην κρούση. Αλλά αν οι ΗΕΔ αυτές είναι πολύ μεγαλύτερες από την Ε και την τάση στα άκρα της αντίστασης, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι $E-iR \approx 0$ (και τις αγνοήσουμε, όπως κάναμε για τις δυνάμεις F και $F_α$, στην πλαστική κρούση), τότε:

$$E_1 + E_2 = 0 \to -\frac{dΦ_1}{dt} - \frac{dΦ_2}{dt} = 0 \to -\frac{dΦ_{ολ}}{dt} = 0 \quad (3)$$

Αν ο ρυθμός μεταβολής της ολικής μαγνητικής ροής είναι μηδενικός, τότε η μαγνητική ροή διατηρείται σταθερή στον απειροελάχιστο χρόνο, μέχρι να αποκατασταθεί η ίδια ένταση του ρεύματος στα δύο πηνία.

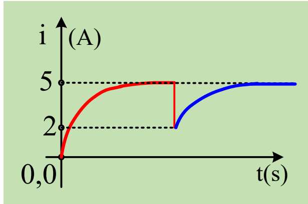
Ναι αλλά στην κρούση δουλέψαμε με ορμές. Μήπως έχουμε κάτι ανάλογο στην ηλεκτρομαγνητισμό; Η ορμή είναι p=m·υ, άρα το ανάλογο μέγεθος εδώ πρέπει να είναι ίσο με το γινόμενο L·i! Υπάρχει τέτοιο μέγεθος; Υπάρχει και αυτό είναι η μαγνητική ροή:

$$p = mυ \quad \to \quad Φ = L \cdot i$$

Αν λοιπόν κατά αναλογία με την ΑΔΟ εφαρμόσουμε την διατήρηση της μαγνητικής ροής στο κύκλωμα, όπως προκύπτει από την εξίσωση (3), θα έχουμε:

$$Φ_π = Φ_μ \to LI_{max} + L_1 0 = (L + L_1) i_κ \to i_κ = \frac{L}{L+L_1} I_{max} = \frac{20mH}{50mH} 5A = 2A$$

Συνεπώς το διάγραμμα θα παίρνει την ίδια μορφή με αυτή της υ=υ(t) παραπάνω, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου το μπλε τμήμα είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα δυο πηνία.



Ερώτηση:

Και αν γνωρίζουμε τι συμβαίνει με την ενέργεια στην πλαστική κρούση, τι λέτε να συμβαίνει στην τελευταία περίπτωση με το άνοιγμα του διακόπτη;

dmargaris@gmail.com