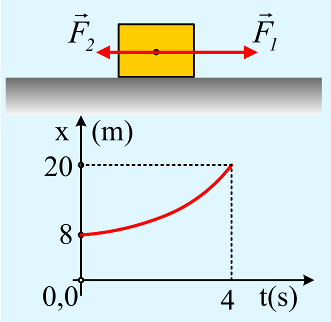
Όταν καταργείται η μία δύναμη.



Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή t=0 ασκούνται πάνω του δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2=2N, με αποτέλεσμα η θέση του, κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα x΄x, να μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία κινήθηκε το σώμα και η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_1=4s.

ii) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης F_1;

iii) Τη χρονική στιγμή t_1, η δύναμη F_1 παύει να ασκείται.

α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος τις χρονικές στιγμές t_2=10s και t_3=12s.

β) Να υπολογισθεί το έργο κάθε δύναμης μέχρι τη χρονική στιγμή t_3.

Απάντηση:

i) Η μετατόπιση του σώματος από 0-4s είναι $\Delta x_1=x_1-x_0=20m-8m=12m$, ενώ αφού οι δυο δυνάμεις είναι σταθερές το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα η κίνησή του να είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon=\alpha_1 t \ \ (1) \qquad \Delta x=\frac{1}{2}a_1 t^2 \ \ (2)$$

Από την εξίσωση (2) βρίσκουμε για την επιτάχυνση α_1:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1 t_1^2 \ \rightarrow 2\Delta x_1=a_1 t_1^2 \ \rightarrow \alpha_1=\frac{2\Delta x_1}{t_1^2}=\frac{2\cdot 12m}{4^2 s^2}=1{,}5m/s^2.$$

Και με αντικατάσταση στην εξίσωση (1):

$$\upsilon_1=\alpha_1 t_1=1{,}5\cdot 4m/s=6m/s$$

ii) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, για το παραπάνω χρονικό διάστημα, παίρνουμε:

$$\Sigma F=ma_1 \rightarrow F_1-F_2=ma_1 \rightarrow F_1=F_2+ma_1=2N+2\cdot 1{,}5N=5N$$

iii) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F_1, τότε το σώμα αποκτά επιτάχυνση α_2, όπου:

$$\Sigma F=ma_2 \rightarrow -F_2=ma_2 \rightarrow a_2=\frac{-F_2}{m}=\frac{-2}{2}m/s^2=-1m/s^2.$$

Οπότε για τη νέα ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, αντί για τις εξισώσεις (1) και (2), θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon=\upsilon_1+\alpha_2\cdot\Delta t \ \ (1a) \qquad \Delta x=\upsilon_1\cdot\Delta t+\frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2 \ \ (2a)$$

α) Από την εξίσωση (1^α) για την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_2=10s, όπου Δt_2=10s-4s=6s, παίρνουμε

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot \Delta t_2 = 6m/s + (-1) \cdot 6m/s = 0$$

Με την ίδια λογική, τη στιγμή t_3, όπου $\Delta t_3 = t_3 - t_1 = 12s - 4s = 8s$, θα έχουμε:

$$\upsilon_3 = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot \Delta t_3 = 6m/s + (-1) \cdot 8m/s = -2m/s.$$

Δηλαδή τη στιγμή t_2 το σώμα σταματά να κινείται προς τα δεξιά και αρχίζει να επιταχύνεται προς τα αριστερά, προς την αρνητική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_3 νε κινείται με ταχύτητα μέτρου 2m/s με φορά προς τα αριστερά.

β) Το έργο της δύναμης F_1 για όσο χρόνο ασκείται στο σώμα, είναι ίσο:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = 5N \cdot 12m = 60J$$

Το αντίστοιχο έργο της δύναμης F_2 μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση υπολογισμού του έργου:

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_{o\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (3)$$

Αρκεί να βρούμε τη συνολική μετατόπιση και τη γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης.

Από την εξίσωση (2^α) βρίσκουμε την μετατόπιση του σώματος από 4s-12s:

$$\Delta x_3 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_3 + \frac{1}{2} a_2 (\Delta t_3)^2 = 6 \cdot 8m + \frac{1}{2}(-1) \cdot 8^2 m = 16m$$

Συνεπώς η συνολική μετατόπιση του σώματος από 0-12s, είναι ίση με:

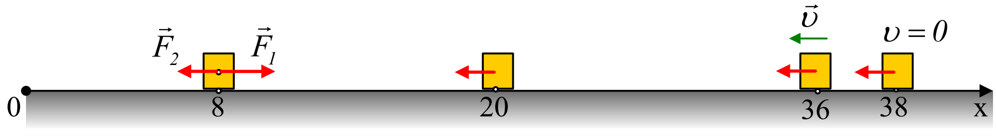
$$\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_3 = 12m + 16m = 28m$$

Συνεπώς η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης είναι α=180°, αφού προέκυψε θετική απομάκρυνση και έχουμε δύναμη προς την αρνητική κατεύθυνση. Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση (3), παίρνουμε:

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_{o\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2N \cdot 28m \cdot (-1) = -56J\ .$$

Σχόλια:

1) Θα μπορούσαμε να «σπάσουμε» την κίνηση του σώματος, κατά τη διάρκεια της άσκησης της F_2.



Από t_1 έως t_2 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος το σώμα μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_{2\alpha} = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2} a_2 (\Delta t_2)^2 = 6 \cdot 6m + \frac{1}{2}(-1) \cdot 6^2 m = 18m$$

Συνεπώς από 0-10s η δύναμη F_2 παράγει έργο:

$$W_{2\alpha} = |F_2| \cdot |\Delta x_1 + \Delta x_{2a}| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2N \cdot (12m + 18m) \cdot (-1) = -60J$$

Στη συνέχεια το σώμα επιταχύνεται προς τα αριστερά κατά:

$$\Delta x_{2\beta}=\frac{1}{2}a_2\left(\Delta t_{2\beta}\right)^2=\frac{1}{2}(-1)\cdot(8-6)^2m=-2m$$

Οπότε η δύναμη παράγει έργο επιπλέον:

$$W_{2\beta}=\left|F_2\right|\cdot\left|\Delta x_{2\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu 0^\circ=2N\cdot 2m=+4J$$

Οπότε το συνολικό έργο της F_2 είναι:

$$W_2=W_{2\alpha}+W_{2b}=-60J+4J=-56J$$

2) Υπάρχει βέβαια πάντα και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα! Ας το εφαρμόσουμε ανάμεσα στις θέσεις για t=0 και t=12s:

$$K_3-K_0=W_1+W_2\rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon_3^2-0=W_1+W_2\rightarrow$$
$$W_2=\frac{1}{2}m\upsilon_3^2-W_1=\frac{1}{2}2\cdot 2^2J-60J=-56J$$

dmargaris@gmail.com