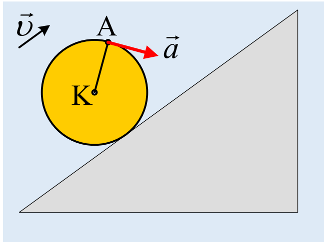
Η κύλιση τροχού και η επιτάχυνση σημείου.



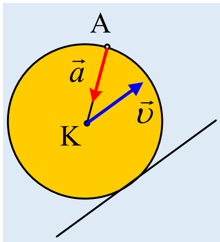
Ένας τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) σε ανηφορικό δρόμο. Σε μια στιγμή t_1, ένα σημείο Α της περιφέρειάς του, έχει επιτάχυνση κάθετη στην ακτίνα ΚΑ, όπως στο σχήμα.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις, δίνοντας και σύντομες δικαιολογήσεις.

i) Η κύλιση γίνεται με σταθερή ταχύτητα του κέντρου (και κέντρου μάζας) Κ.
ii) Το κέντρο Κ του τροχού, επιταχύνεται προς τα πάνω κατά μήκος του δρόμου.
iii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή t_1 δεν είναι μηδενική.
iv) Η επιτάχυνση του σημείου Α έχει μεγαλύτερο μέτρο από την επιτάχυνση του κέντρου Κ.

Απάντηση:

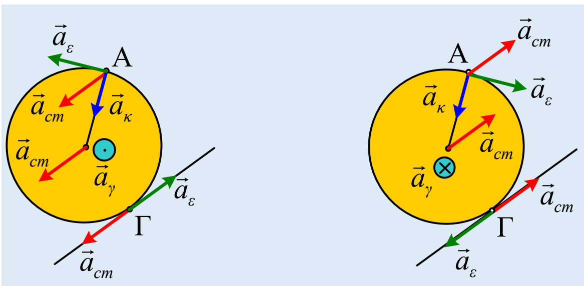
Παρακάτω θεωρούμε ότι η κύλιση είναι μια σύνθετη κίνηση, αποτελούμενη από μια ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση με ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου Κ και μια στροφική γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το Κ, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας.



i) Έστω ότι ο τροχός κυλίεται κινούμενος με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας Κ, όπως στο σχήμα. Από την εξίσωση $\upsilon_{cm}=\omega R$ προκύπτει ότι και η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, οπότε το στερεό έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση, συνεπώς το σημείο δεν εμφανίζει επιτρόχια επιτάχυνση, για την κυκλική του κίνηση γύρω από το Κ. Αλλά τότε η μόνη επιτάχυνση που έχει το σημείο Α είναι η κεντρομόλος, όπως στο διπλανό σχήμα, «όπερ άτοπο»! Πράγμα που αντιβαίνει στο δεδομένο για την επιτάχυνση του Α.

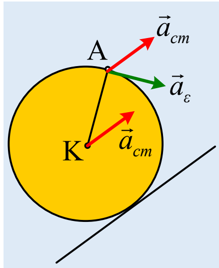
Η πρόταση είναι λανθασμένη.

ii) Αφού η ταχύτητα του Κ δεν παραμένει σταθερή, θα έχει επιτάχυνση α_{cm}, παράλληλη στο δρόμο, είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω, όπως στα παρακάτω σχήματα.



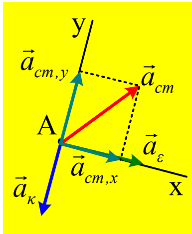
Έστω ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας α_{cm} είναι προς τα κάτω, όπως στο αριστερό σχήμα. Αφού ο τροχός κυλίεται, αν εστιάσουμε στο σημείο Γ, επαφής με το δρόμο, για να μην έχουμε ολίσθηση, θα πρέπει αυτό εκτός της επιτάχυνσης α_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης, να έχει και μια αντίθετη επιτάχυνση, την επιτρόχια επιτάχυνση α_ε, με μέτρο $\alpha_\varepsilon=\alpha_{cm}$ λόγω της στροφικής κίνησης. Αλλά τότε αν μεταφερθούμε στο σημείο Α, θα έχουμε τις επιταχύνσεις που έχουν σχεδιασθεί, όπου $α_κ$ η κεντρομόλος (την ίδια κεντρομόλο έχει και το σημείο Γ, την οποία αποφύγαμε να σχεδιάσουμε…). Αν συνδέσουμε τις τρεις αυτές επιταχύνσεις του Α, προφανώς δεν πρόκειται να πάρουμε την επιτάχυνση της εκφώνησης. Άρα η επιτάχυνση $α_{cm}$, έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο δεξιό σχήμα, όπου οι τρεις επιταχύνσεις θα μπορούσαν να δώσουν επιτάχυνση, κάθετη στην ακτίνα, όπως μας δόθηκε.

Η πρόταση είναι σωστή.



iii) Έστω ότι τη στιγμή t_1 η ταχύτητα του κέντρου Κ είναι μηδενική (στιγμιαία). Τότε με βάση το προηγούμενο ερώτημα, για το σημείο Α, θα είχαμε τις επιταχύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα, αφού η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι μηδενική. Προσέξτε ότι η επιτρόχια $α_ε$ είναι κάθετη στην ακτίνα ΑΚ, ενώ η $α_{cm}$ είναι παράλληλη στο κεκλιμένο δρόμο. Προφανώς η συνισταμένη αυτών δύο επιταχύνσεων δεν θα έχει την διεύθυνση της $α_ε$. Άρα και πάλι καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο τροχός έχει μη μηδενική ταχύτητα κέντρου μάζας και η πρόταση είναι σωστή.



iv) Στο διπλανό σχήμα «ξεχάσαμε» τον τροχό… και μείναμε μόνο στο σημείο Α και τις επιταχύνσεις του, όπως τις βρήκαμε στο ii) ερώτημα. Παίρνουμε δύο κάθετους άξονες x,y, όπου ο y έχει την διεύθυνση της ακτίνας και ο x της εφαπτόμενης σε αυτόν στο σημείο Α και αναλύουμε την επιτάχυνση $α_{cm}$ σε δυο συνιστώσες, στους άξονες. Αλλά αφού η επιτάχυνσης α του σημείου Α είναι κάθετη στην ακτίνα έχει τη διεύθυνση x, οπότε $α_y=α_{cm,y}-α_κ=0$, ενώ:

$$a = \alpha_{cm.x} + a_{\varepsilon} \xrightarrow{\alpha_{\varepsilon}=\alpha_{cm}} a = \alpha_{cm.x} + a_{cm}$$

Προφανώς από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι η επιτάχυνση του σημείου Α έχει μεγαλύτερο μέτρο από το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Κ. Η πρόταση είναι σωστή.

dmargaris@gmail.com