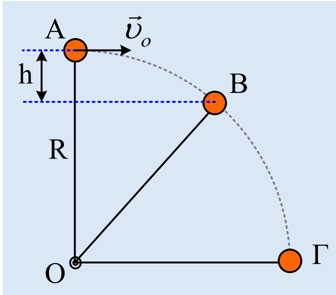
Μια κατακόρυφη κυκλική κίνηση.



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=1kg είναι δεμένη στο άκρο μη ελαστικού νήματος μήκους l=0,9m, διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R=l. Σε μια στιγμή περνάει από το σημείο Α, με το νήμα κατακόρυφο έχοντας ταχύτητα υ_0=3m/s, ενώ μετά από λίγο περνάει από το σημείο Β, όπου η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ Α και Β είναι h=0,35m.

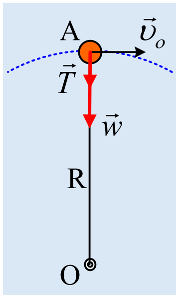
i) Να βρεθεί η τάση του νήματος, όταν η σφαίρα περνάει από τη θέση Α.

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα υ_1 της σφαίρας στη θέση Β, καθώς και η τάση του νήματος στη θέση αυτή;

iii) Συνεχίζοντας η σφαίρα φτάνει στη θέση Γ, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο. Να υπολογιστούν η οριζόντια και η κατακόρυφη επιτάχυνση της σφαίρας στη θέση αυτή.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

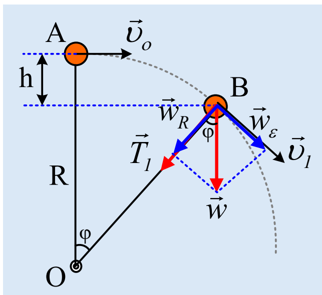


i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις, βάρος και τάση του νήματος που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση Α. Η ταχύτητα της σφαίρας είναι εφαπτόμενη στην τροχιά, συνεπώς οριζόντια, ενώ οι δυο δυνάμεις κατευθύνονται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, οπότε η συνισταμένη τους παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$$\Sigma F = m\frac{\upsilon_0^2}{R} \rightarrow T + w = m\frac{\upsilon_0^2}{R} \rightarrow T = m\frac{\upsilon_0^2}{R} - mg \rightarrow$$

$$T = 1\cdot\frac{3^2}{0,9}N - 1\cdot 10N = 0$$

Το νήμα δηλαδή δεν ασκεί δύναμη στο σώμα και το βάρος της σφαίρας παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Ας σκεφτούμε ένα δορυφόρο που γυρίζει γύρω από τη Γη ή τη Σελήνη…



ii) Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση Β, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Α και Β:

$$E_{M,A} = E_{M,B} \rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} = \sqrt{3^2 + 2\cdot 10\cdot 0,35}m/s = \sqrt{16}m/s = 4m/s$$

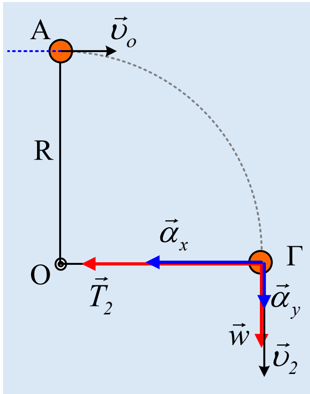
Εξάλλου η συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας, είναι η κεντρομόλος δύναμη:

$$\Sigma F_R = m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow T_1 + mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow T_1 = m\frac{\upsilon_1^2}{R} - mg\cdot\frac{R-h}{R} \rightarrow$$

$$T_1 = 1\cdot\frac{4^2}{0,9}N - 1\cdot 10\cdot\frac{0,9-0,35}{0,9}N = \frac{160}{9}N - \frac{55}{9}N = \frac{105}{9} = 11,7N$$

iii) Θεωρώντας τώρα το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση Γ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Α και Γ:

$$E_{M,A} = E_{M,\Gamma} \rightarrow K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgR = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + 0 \rightarrow$$
$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gR} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}9}m/s = \sqrt{27}m/s$$



Η οριζόντια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_x$, κάθετη στην ταχύτητα, με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας και οφείλεται στην τάση του νήματος $\vec{T}_2$. Για το μέτρο της έχουμε:

$$\alpha_x = \frac{\upsilon_2^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{27}\right)^2}{0.9}N = \frac{27}{0{,}9}m/s^2 = 30m/s^2.$$

Η κατακόρυφη επιτάχυνση $\vec{\alpha}_y$, έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας και συνδέεται με την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, οφείλεται δε στο βάρος του σώματος, συνεπώς:

$$\Sigma F_y = ma_y \rightarrow mg = ma_y \rightarrow a_y = g = 10m/s^2.$$

dmargaris@gmail.com