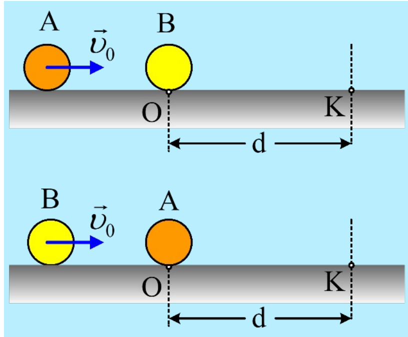
Δυο ελαστικές κρούσεις



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται μια σφαίρα Α μάζας m_1 με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ και σε μια στιγμή $t_0=0$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Β, μάζας $m_2=1kg$ και ίσης ακτίνας, η οποία είναι ακίνητη στη θέση Ο. Οι δυο σφαίρες περνούν από τη θέση Κ, σε απόσταση d τις χρονικές στιγμές 1s και 4s.

i) Ποια σφαίρα έχει μεγαλύτερη μάζα και σε ποια σφαίρα αντιστοιχούν οι παραπάνω χρονικές στιγμές;

ii) Να βρεθεί η μάζα m_1 της σφαίρας Α.

iii) Αν επαναλάβουμε το πείραμα, αντιστρέφοντας τους ρόλους των δύο σφαιρών, όπως στο 2ο σχήμα, να υπολογιστεί σε πόσο χρόνο η Α σφαίρα να φτάσει στη θέση Κ. Ποια θα είναι τότε η απόσταση D των δύο σφαιρών, σε σχέση με την απόσταση d;

Απάντηση:

i) Οι ταχύτητες υ_1 και υ_2 των δύο σφαιρών μετά την κρούση, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\upsilon_0 \qquad (1) \qquad\qquad \upsilon_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0 \qquad (2)$$

Αφού και η Α σφαίρα φτάνει στο σημείο Κ, μετά την κρούση, σημαίνει ότι κινήθηκε προς τα δεξιά, στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Αλλά τότε από την (1), έχουμε ότι:

$$m_1-m_2>0 \quad ή \quad m_1>m_2.$$

Αλλά τη στιγμή που τελειώνει η κρούση η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη ταχύτητα (διαφορετικά ή θα έπρεπε η Α σφαίρα να περάσει μέσα από την Β ή να έχουμε κοινή ταχύτητα, πλαστική κρούση), συνεπώς θα φτάσει πρώτη στο Κ. Αλλά τότε για τις χρονικές στιγμές θα ισχύει $t_1<t_2$, οπότε $t_1=4s$ και $t_2=1s$.

ii) Για την απόσταση d μεταξύ Ο και Κ, ισχύουν:

$$d=\upsilon_1\cdot t_1 \quad \text{και} \quad d=\upsilon_2\cdot t_2 \rightarrow \upsilon_1\cdot t_1=\upsilon_1\cdot t_2 \rightarrow \upsilon_2=4\upsilon_1$$

Έτσι από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{2m_1}{m_1+m_2}\,\upsilon_0=4\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\upsilon_0 \rightarrow 2m_1=4m_1-4m_2 \rightarrow m_1=2m_2=2\,kg$$

iii) Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών τώρα μετά την κρούση, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\upsilon_0 \qquad (1\alpha) \qquad\qquad \upsilon'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\,\upsilon_0 \qquad (2\alpha)$$

Με αντικατάσταση των μαζών των δύο σφαιρών, βρίσκουμε:

$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0 = \frac{2\cdot 1}{2+1}\upsilon_0 = \frac{2}{3}\upsilon_0 \quad (1\beta)$$

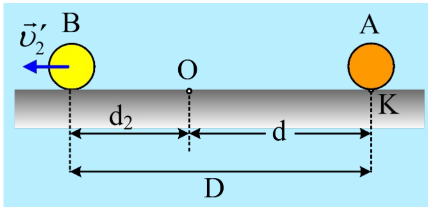
$$\upsilon'_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0 = \frac{1-2}{2+1}\upsilon_0 = -\frac{1}{3}\upsilon_0 \quad (2\beta)$$

Ενώ η ταχύτητα της Α σφαίρας, μετά την πρώτη κρούση ήταν ίση με:

$$\upsilon_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0 = \frac{2-1}{2+1}\upsilon_0 = \frac{1}{3}\upsilon_0$$

Αλλά τότε η σφαίρα Α θα φτάσει στο σημείο Α σε χρονικό διάστημα:

$$d = \upsilon'_1\cdot \Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{\upsilon'_1} = \frac{\frac{\upsilon_0}{3}\cdot t_1}{\frac{2\upsilon_0}{3}} = \frac{t_1}{2} = 2s$$



Οπότε η μετατόπιση της Β σφαίρας, στον ίδιο χρόνο είναι ίση:

$$\Delta x_2 = d_2 = \upsilon'_2 \cdot \Delta t_1 = -\frac{1}{3}\upsilon_0\cdot \Delta t_1 = -\frac{d}{2}$$

Συνεπώς η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών, με βάση και το διπλανό σχήμα είναι ίση:

$$D = d + d_2 = 1{,}5d$$

dmargaris@gmail.com