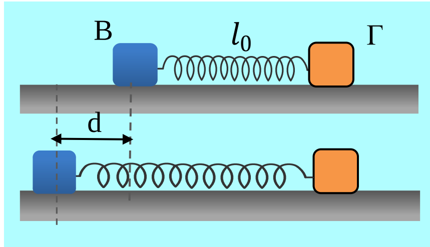
Μια ΑΑΤ και μια συνέχεια …



Δύο σώματα Β και Γ, της ίδιας μάζας m=2kg, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=200N/m. Συγκρατούμε με το ένα χέρι μας το σώμα Γ στην θέση του, ενώ με το άλλο μας χέρι μετακινούμε το σώμα Β τεντώνοντας το ελατήριο κατά d, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή t=0 το αφήνουμε να κινηθεί εκτελώντας ΑΑΤ. Το σώμα Β διανύει διάστημα s=0,6m μέχρι τη στιγμή $t_1 = \left(\pi/_{15}\right)s$, όπου αφήνουμε ελεύθερο και το σώμα Γ να κινηθεί.

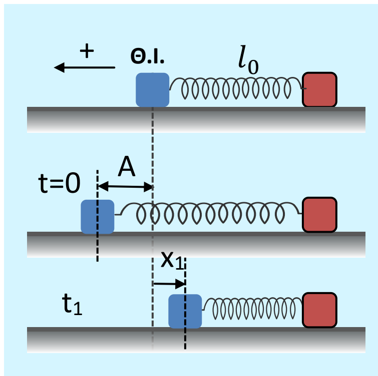
i) Να βρεθεί η αρχική επιμήκυνση d του ελατηρίου.

ii) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του Β σώματος της στιγμή t_1.

iii) Να υπολογισθεί η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, στη διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων, για πρώτη φορά, τη στιγμή t_2.

iv) Να βρεθεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα Β, από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_2.

Απάντηση:



i) Μέχρι τη στιγμή t_1 που συγκρατούμε ακίνητο το σώμα Γ, η κατάσταση είναι ίδια με το να ήταν δεμένο το δεξιό άκρο του ελατηρίου, σε τοίχο. Συνεπώς έχουμε το σώμα Β να εκτελεί μια ΑΑΤ, ξεκινώντας από την ακραία θέση του προς τα αριστερά. Ας πάρουμε λοιπόν την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική, οπότε θα έχουμε και αρχική φάση απομάκρυνσης $\varphi_0 = \pi/2$ (γιατί;)), με αποτέλεσμα η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας (και θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, βλέπε σχήμα) να είναι της μορφής:

$$x = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)\ \acute{o}\pi o\upsilon:$$

$$\omega = \sqrt{k/_m} = \sqrt{200/_2}\ rad/s = 10 rad/s.$$

Αντικαθιστώντας το χρόνο στην εξίσωση (1) θα πάρουμε:

$$x_1 = A \cdot \eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = A \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{A}{2}$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο μας λέει ότι η θέση αυτή είναι δεξιά της θέσης ισορροπίας, όπως στο παραπάνω σχήμα.

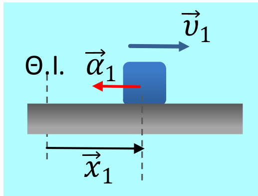
Συνεπώς για την απόσταση d, με τη βοήθεια του διαστήματος s μέχρι τη στιγμή t_1, θα έχουμε:

$$s = A + \ |x_1| \ = A + \frac{A}{2} = 1{,}5A \rightarrow A = d = \frac{s}{1{,}5} = \frac{0{,}6m}{1{,}5} = 0{,}4m$$

ii) Για την ταχύτητα του σώματος Β, τη στιγμή t_1 έχουμε:

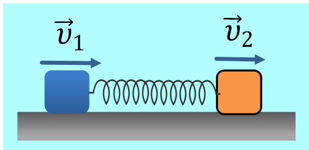
$$\upsilon_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \ \cdot \ 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) m/s = -2\sqrt{3}\, m/s$$

Το σώμα κινείται προς τα δεξιά... Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και την επιτάχυνση, αλλά ας συντομεύσουμε:



$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 = -10^2 \cdot (-0{,}2)\, m/s^2 = +20 m/s^2.$$

iii) Τη στιγμή που ελευθερώνουμε το σώμα Γ, παύει να έχουμε την παραπάνω κίνηση. Η μελέτη της νέας κίνησης, αρμονική ταλάντωση και αυτή, αλλά όχι υλικού σημείου, αλλά συστήματος, ξεφεύγει από τα σχολικά πλαίσια, οπότε την παρακάμπτουμε, ακολουθώντας άλλο μονοπάτι επίλυσης.



Το σύστημα των δύο σωμάτων (συν το ιδανικό- άμαζο ελατήριο) αποτελεί ένα μονωμένο σύστημα, η ορμή του οποίου διατηρείται, στη διάρκεια του φαινομένου. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι, για όσο χρόνο η ταχύτητα του Β σώματος είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ταχύτητα του Γ, τότε το μήκος του ελατηρίου μειώνεται, ενώ αντίθετα αν το Γ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β, τα σώματα απομακρύνονται, συνεπώς το μήκος του ελατηρίου αυξάνεται, συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο μήκος του, το έχει τη στιγμή που τα δυο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες, έστω υ_κ. Ελάχιστο μήκος ελατηρίου σημαίνει μέγιστη παραμόρφωση, συνεπώς και μέγιστη δυναμική ενέργεια.

Έτσι με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) παίρνουμε:

$$\vec{p}_{t1} = \vec{p}_{t2} \ \rightarrow m_1\upsilon_1 + 0 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\left(-2\sqrt{3}\right)}{2+2} m/s = -\sqrt{3}\, m/s.$$

Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) για το σύστημα μεταξύ των δύο καταστάσεων στις στιγμές t_1 και t_2 παίρνουμε:

$$K_1 \ + U_1 \ = K_2 \ + U_2 \ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\, m_1\, \upsilon_1^2 \ + \frac{1}{2}\, k\, x_1^2 \ = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2} k\, \Delta l_{max}^2 \rightarrow$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\, m_1\, \upsilon_1^2 \ + \frac{1}{2}\, k\, x_1^2 \ - \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \upsilon_\kappa^2 \rightarrow$$

$$U_{max}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2 J+\frac{1}{2}\cdot 200\cdot(0{,}2)^2 J-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 J=10J$$

iv) Το έργο της δύναμης του ελατηρίου η οποία ασκείται στο σώμα Β, δεν μπορεί να προκύψει από την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, αφού το ελατήριο παράγει έργο και πάνω στο σώμα Γ! Οπότε υποχρεωτικά το συνδέουμε με την κινητική ενέργεια, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Β.

$$K_{t2}-K_{t1}=W_{F_{\varepsilon\lambda}}+W_w+W_N \rightarrow$$

Αλλά $W_w=W_N=0$, δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση, οπότε:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}}=K_{t2}-K_{t1}=\frac{1}{2}\,m_1\,\upsilon_\kappa^2-\frac{1}{2}\,m_1\,\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}}=\frac{1}{2}\,2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 J-\frac{1}{2}\,2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2 J=-9J$$

dmargaris@gmail.com