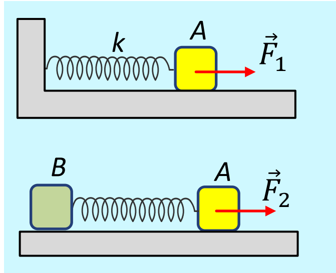
Η ενέργεια του ελατηρίου και οι μεταβολές της.



Ένα σώμα Α μάζας Μ=2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=400N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σταθερά σε κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή t=0 ασκούμε στο σώμα μια μεταβλητή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ η οποία μετακινεί το σώμα, επιμηκύνοντας το ελατήριο, οπότε τη στιγμή t_1 το σώμα έχει ταχύτητα 0,5m/s, ενώ το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl_1=0,1m.

i) Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της, τη χρονική στιγμή t_1.

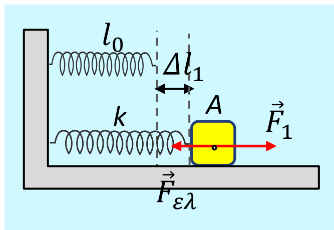
ii) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ από 0-t_1.

Αποδεσμεύουμε το ελατήριο από τον τοίχο και στο αριστερό του άκρο δένουμε ένα δεύτερο σώμα Β, μάζας m=1kg. Ασκώντας τώρα στο σώμα Α για t=0 , μια μεταβλητή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_2$, τη στιγμή t_2, το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δl_2=0,1m, ενώ τα σώματα Α και Β έχουν ταχύτητες προς τα δεξιά με μέτρα υ_1=0,5m/s και υ_2=0,2m/s αντίστοιχα.

iii) Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της, τη χρονική στιγμή t_2.

iv) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ από 0-t_2.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουμε πάρει το σώμα τη στιγμή t_1, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl_1 ασκώντας στο Α σώμα την δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_1 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}400 \cdot 0{,}1^2 J = 2J$$

Την ίδια στιγμή η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στο σώμα Α, έχει ισχύ:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}} = |F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -k\Delta l_1 \cdot \upsilon_1 = -400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5W = -20W$$

Τι μετράει η παραπάνω ισχύς; Το ρυθμό με τον οποίο παρέχει ενέργεια το ελατήριο στο σώμα Α και η αρνητική της τιμή, μας δείχνει ότι το ελατήριο αφαιρεί ενέργεια από το σώμα με ρυθμό 20J/s, συνεπώς η ενέργεια του ελατηρίου θα αυξάνεται με ρυθμό 20J/s! Δηλαδή:

$$\frac{dU_1}{dt} = 20 J/s$$

Σημείωση: Κάποιος θα μπορούσε να φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα δουλεύοντας με την αντίδραση της δύναμης του ελατηρίου, την οποία ασκεί το σώμα Α στο ελατήριο! Δοκιμάστε το...

Θα μπορούσε ακόμη κάποιος να στηριχθεί και στη σχέση που συνδέει το έργο της συντηρητικής δύναμης με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\Delta U \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dW}{dt} = +|F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |\upsilon_1| = +20 {}^{J}/_{s}.$$

ii) Εφαρμόζοντας για το σώμα Α το θεώρημα έργου-ενέργειας από 0-t_1 παίρνουμε:

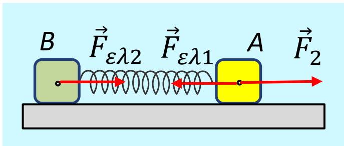
$$K_\tau - K_\alpha = W_{F_1} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_w + W_N \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 - 0 = W_{F_1} - U_1 \rightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + U_1 \ \ (1)$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2} 2 \cdot 0{,}5^2 J + 2J = 2{,}25J$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σχέση (1) εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας. Η δύναμη που μετακινεί το σώμα Α προσφέρει ενέργεια, ένα μέρος της οποίας μεταφέρεται στο ελατήριο αυξάνοντας την δυναμική του ενέργεια και το υπόλοιπο παραμένει στο σώμα με τη μορφή της κινητικής ενέργειας.

iii) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις από το ελατήριο τη στιγμή t_2.



Τη στιγμή αυτή το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}400 \cdot 0{,}1^2 J = 2J$$

Την ίδια στιγμή η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στο σώμα Α, έχει ισχύ:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda 1}} = |F_{\varepsilon\lambda 1}| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -k\Delta l_2 \cdot \upsilon_1 = -400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5W = -20W$$

Ενώ η αντίστοιχη ισχύς πάνω στο σώμα Β είναι ίση:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda 2}} = |F_{\varepsilon\lambda 2}| \cdot |\upsilon_2| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = k\Delta l_2 \cdot \upsilon_2 = 400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2W = 8W$$

Αλλά αν το ελατήριο αφαιρεί ενέργεια $20 {}^{J}/_{s}$ από το Α σώμα και μεταφέρει ενέργεια $8 {}^{J}/_{s}$ στο σώμα Β, τότε κερδίζει ενέργεια $12 {}^{J}/_{s}$, συνεπώς η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dU_2}{dt} = 12 {}^{J}/_{s}.$$

iv) Από την διατήρηση της ενέργειας στο διάστημα 0-t_2, σύμφωνα με το συμπέρασμα στο ερώτημα ii) παίρνουμε:

$$W_{F_2} = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + U_2 \rightarrow$$

$$W_{F_2} = \frac{1}{2}2 \cdot 0{,}5^2 J + \frac{1}{2}1 \cdot 0{,}2^2 J + 2J = 2{,}27J$$

Ερώτηση:

Θα μπορούσαμε αντί για Α.Δ.Ε. να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Α σώμα για να υπολογίσουμε το παραπάνω έργο, όπως και στο ερώτημα ii); Η απάντηση είναι όχι, αφού δεν γνωρίζουμε το έργο της δύναμης $F_{ελ1}$ στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Πολλές φορές εκφράζεται η άποψη ότι δεν ισχύει στη περίπτωση αυτή το θεώρημα έργου-ενέργειας. Η άποψη δεν είναι σωστή... Το θεώρημα εφαρμόζεται και ισχύει, άλλο αν δεν γνωρίζουμε κάποιο έργο, με αποτέλεσμα να μην οδηγούμαστε σε λύση!

dmargaris@gmail.com