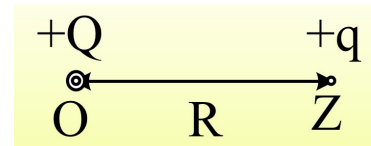


Μιλώντας με τη γλώσσα της ενέργειας.

Ας παρακολουθήσουμε ένα μάθημα, όπου ο καθηγητής (Κ), θέτει ένα πρόβλημα, ζητώντας από τους μαθητές να το επιλύσουν.

Το πρόβλημα:

Ένα φορτισμένο σωματίδιο Χ μάζας m και φορτίου $+q$, αφήνεται στο σημείο Ζ του σχήματος σε απόσταση $(OZ) = R$, από ένα ακλόνητο σημειακό φορτίο $+Q$. Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που



θα αποκτήσει το σωματίδιο Χ, εφαρμόζοντας ενεργειακή μέθοδο, μιλώντας δηλαδή τη γλώσσα της ενέργειας και όχι μελετώντας την κίνηση με την βοήθεια της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο.

Δίνονται m , q , Q , R , K_c . Η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη από 1000 m/s και δεν μας απασχολούν ζητήματα σχετικότητας, ενώ το “πείραμα” πραγματοποιείται στο κενό και εκτός πεδίου βαρύτητας.

Η λύση του:

Μετά από λίγο η Αγγελική (Α) σηκώνει το χέρι της.

(Α) το έλυσα κύριε...

(Κ) Έλα στον πίνακα να μας δώσεις Αγγελική τη λύση.

Η Αγγελική εξηγεί, γράφοντας:

Το σωματίδιο λόγω του φορτίου και ευρισκόμενο σε ηλεκτρικό πεδίο, στη θέση Ζ, έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = K_c \frac{Qq}{R}$$

Καθώς απωθείται από το φορτίο Q , κινείται μέσα σε ένα συντηρητικό πεδίο, συνεπώς το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας (η μηχανική ενέργεια) παραμένει σταθερό. Η ενέργεια αυτή είναι του συστήματος, αλλά αφού μόνο το σωματίδιο Χ θα κινηθεί, τελικά η αρχική ενέργεια που έχει το σύστημα, αποδίδεται ως κινητική ενέργεια στο σωματίδιο. Έτσι αν σε κάποια θέση η κινητική ενέργεια γίνει μέγιστη, στη θέση αυτή η δυναμική θα γίνει ελάχιστη. Και

ελάχιστη δυναμική ενέργεια έχουμε όταν το σωματίδιο φτάσει στο άπειρο, οπότε $U=0$, μιας και θα βρίσκεται πλέον εκτός του ηλεκτρικού πεδίου και δεν θα έχουμε καμιά αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτίων για να τους αποδώσουμε δυναμική ενέργεια. Δηλαδή:

$$K_Z + U_Z = K_{max} + U_{min} \rightarrow$$

$$0 + K_c \frac{Qq}{R} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 \rightarrow$$

$$v_{max} = \sqrt{2K_c \frac{Qq}{mR}}$$

(Κ) Ευχαριστούμε Αγγελική. Πολύ σωστά! Έχει κάποιος να προσθέσει κάτι;

Ο Βασίλης (Β) σηκώνει το χέρι του. Εγώ κύριε...

(Κ) Λέγε Βασίλη, τι θέλεις;

(Β) Κύριε δεν ξέρουμε πόση είναι η αρχική δυναμική ενέργεια, αυτή υπολογίζεται αφού πρώτα ορίσουμε εμείς σε ποια θέση θα θεωρήσουμε ότι αυτή είναι μηδενική. Γιατί να πάρουμε δηλαδή ότι αυτή είναι μηδενική υποχρεωτικά στο άπειρο; Θα μπορούσαμε να πάρουμε ότι στην αρχική θέση (Ζ) η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδενική. Άλλωστε δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο (τι να την κάνουμε άλλωστε...), αλλά οι μεταβολές της σε κάποια μετατόπιση του σωματιδίου Χ, αφού οι μεταβολές της συνδέονται με το έργο τη δύναμης και τελικά με την κινητική ενέργεια που αποκτά το σωματίδιο.

(Κ) Έλα στον πίνακα Βασίλη και υπολόγισέ μας, με βάση τη συλλογιστική σου, την μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σωματίδιο.

Ο Βασίλης γράφει, επεξηγώντας:

Θεωρώ ότι η αρχική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Το σωματίδιο απωθείται και αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια, σε ένα σημείο Κ, αφού μετατοπισθεί κατά x από την αρχική του θέση Ζ, όπου η δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική.



Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_Z + U_Z = K_K + U_K \quad (1) \rightarrow$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσω την δυναμική ενέργεια στο K, αλλά ευτυχώς “τόχω”, αφού διδαχτήκαμε πρόσφατα τα ολοκληρώματα. Υπολογίζω το έργο της δύναμης το πεδίου από το Z στο K, όπου το σωματίδιο θα απέχει κατά $r=R+x$ από το Q:

$$W_{Z \rightarrow K} = \int_R^r F_c dx = \int_R^r K_c \frac{Qq}{r^2} dr = \left[-K_c \frac{Qq}{r} \right]_R^r = K_c Qq \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Αλλά το παραπάνω έργο συνδέεται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας, αφού:

$$W_{Z \rightarrow K} = U_Z - U_K = 0 - U_K = -U_K \rightarrow$$

$$U_K = K_c Qq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη, όταν η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη. Αλλά από την (2) προκύπτει ότι η ελάχιστη δυναμική ενέργεια είναι αυτή για $r \rightarrow \infty$, οπότε:

$$U_{min} = U_K = -K_c \frac{Qq}{R}$$

Οπότε επιστρέφοντας στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - K_c \frac{Qq}{R} \rightarrow$$

$$v_{max} = \sqrt{2K_c \frac{Qq}{mR}}$$

(Κ) Μπράβο Βασίλη! Το έφερες εις πέρας, σωστά!

Εδώ παρεμβαίνουν οι μαθητές... (παραλείπονται τα σχόλια που ακούστηκαν...).

(Κ): Βασίλη γιατί προτιμάς αυτή τη λύση, από την προηγούμενη της Αγγελικής;

(Β) Είναι πιο επιστημονική κύριε, με χρήση ανώτερων μαθηματικών.

Ο Γιάννης (Γ) παρεμβαίνει:

(Γ): Υπάρχει λόγος κύριε να ορίζουμε αυθαίρετα το σημείο αναφοράς όπου μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια;

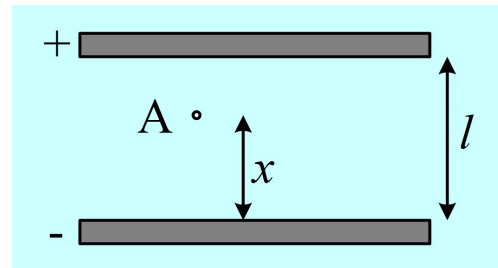
(Κ) Ναι Γιάννη, υπάρχει λόγος, αλλά όχι για να πάμε στην οδό... Βασιλείου!

(Γ) Και τότε ποιος είναι ο λόγος;

(Κ): Ας δούμε ένα άλλο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2^ο:

Δίνεται ένας φορτισμένος επίπεδος πυκνωτής σε τάση $V=10V$, με απόσταση $l=1cm$ μεταξύ των οπλισμών του. Στο σημείο A αφήνεται ένα σωματίδιο με μάζα m και φορτίο $+q$, απέχοντας $x=0,6cm$ από τον κάτω αρνητικό οπλισμό. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία θα



φτάσει το σωματίδιο στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή με την βοήθεια της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και όχι μελετώντας την κίνηση με την βοήθεια της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο. Βαρύτητα δεν υπάρχει.

Η λύση:

Το σωματίδιο θα κινηθεί προς τον αρνητικό οπλισμό στον οποίο έστω ότι φτάνει σε ένα σημείο B. Από την διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad (1a) \rightarrow$$

Εδώ δεν γνωρίζουμε πόσο είναι το δυναμικό και η δυναμική ενέργεια σε κανένα σημείο. Δεν μπορούμε να πούμε ότι η δυναμική ενέργεια στη θέση A είναι π.χ. 2J. Δεν υπάρχει τρόπος προσδιορισμού της... Τι κάνουμε;

Για την ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ισχύει:

$$E = \frac{V}{l} = \frac{V_{AB}}{x} \rightarrow$$

$$V_{AB} = V \frac{x}{l} = 10V \frac{0,6cm}{1cm} = 6V$$

Οπότε ορίζοντας τη δυναμική ενέργεια στο B μηδενική το δυναμικό στο A είναι ίσο με 6V, οπότε τώρα “γνωρίζουμε” τη δυναμική ενέργεια στην αρχική θέση A. Έτσι επιστρέφοντας στην εξίσωση (1) θα έχουμε:

$$0 + qV_A = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV_A}{m}}$$

Βλέπουμε παιδιά, ότι η γνώση της τιμής της δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο δεν είναι πάντα γνωστή ή εύκολο να υπολογιστεί.

Σε κάθε ανάλογη περίπτωση, μπορούμε να ορίσουμε αυθαίρετα εμείς κάποιο σημείο με μηδενι-

κή δυναμική ενέργεια και να προχωρήσουμε, επιλύοντας το πρόβλημα, μερικές φορές πιο εύκολα, όπως στο 2η πρόβλημα, άλλες φορές δυσκολότερα, όπως στη λύση του Βασίλη.

dmargaris@gmail.com