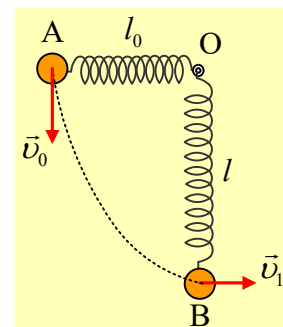


Μια σφαίρα στο άκρο ελατηρίου.

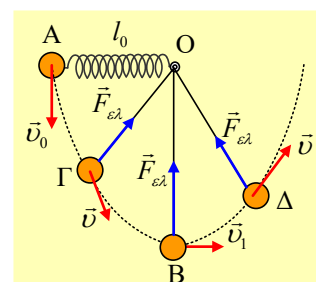
Μια σφαίρα μάζας $0,2\text{kg}$ είναι δεμένη στο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου με μήκος $l_0 = 0,6\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο O και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στη θέση A . Σε μια στιγμή δέχεται μια ώθηση, με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια αρχική ταχύτητα, κάθετη στον άξονα του ελατηρίου, μέτρου $u_0 = 4\text{m/s}$. Μετά από λίγο η σφαίρα φτάνει στη θέση B , όπου ο άξονας του ελατηρίου έχει διαγράψει γωνία 90° , με ταχύτητα u_1 κάθετη στην OB , όπως στο σχήμα (σε κάτοψη), ενώ το ελατήριο έχει μήκος $l = 0,8\text{m}$.



- Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της πρότασης: «η ταχύτητα u_1 είναι η ελάχιστη ταχύτητα της σφαίρας στη διάρκεια της κίνησης».
- Να υπολογιστούν για τη σφαίρα οι μεταβολές ορμής και στροφορμής ως προς το O , μεταξύ των θέσεων A και B .
- Ένας μαθητής βρίσκει την κεντρομόλο δύναμη στη θέση B και από αυτήν υπολογίζει στη συνέχεια την σταθερά του ελατηρίου. Να εξετάσετε αν αυτή είναι μια ορθή μέθοδος και στη συνέχεια να υπολογιστεί η σταθερά k του ελατηρίου.

Απάντηση:

- Καθώς η σφαίρα κινείται προς την θέση B , (στο σχήμα θέση Γ), δέχεται την δύναμη του ελατηρίου, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα να επιβραδύνεται, να μειώνεται η ταχύτητά της, συνεπώς και η κινητική της ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, το οποίο επιμηκώνεται. Στη θέση B η ταχύτητα είναι κάθετη στον



άξονα του ελατηρίου, συνεπώς στιγμιαία το μήκος του ελατηρίου δεν μεταβάλλεται. Αν δούμε όμως τη σφαίρα στη συνέχεια στη θέση Δ , η δύναμη του ελατηρίου επιταχύνει τη σφαίρα, μειώνεται το μήκος του ελατηρίου και η δυναμική του ενέργεια, αφού αυξάνεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας. Με βάση αυτά στη θέση B το ελατήριο έχει το μέγιστο μήκος του και η σφαίρα την ελάχιστη ταχύτητά της.

- Στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι η

δύναμη το ελατηρίου, με κατεύθυνση προς το Ο. Συνεπώς η ροπή της ως προς το Ο είναι μηδενική και η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο, παραμένει σταθερή, αφού $\Sigma \tau_O = 0$.

Έτσι με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της στροφορμής, ως προς το Ο, παίρνουμε:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow mv_0 l_0 = mv_1 l_1 \rightarrow$$

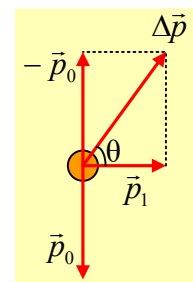
$$v_1 = \frac{v_0 l_0}{l_1} = \frac{4 \cdot 0,6}{0,8} m/s = 3 m/s$$

Ας σημειωθεί ότι η παραπάνω σταθερή στροφορμή είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη στο άκρο Ο του ελατηρίου.

Έτσι ενώ η μεταβολή της στροφορμής από το Α στο Β είναι μηδενική, για την ορμή έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + (-\vec{p}_0)$$

Οπότε με βάση και το διπλανό σχήμα παίρνουμε για το μέτρο της μεταβολής της ορμής:



$$\Delta p = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} = \sqrt{(mv_0)^2 + (mv_1)^2} = m \sqrt{v_0^2 + v_1^2} \rightarrow$$

$$\Delta p = 0,2 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ kgm/s} = 1 \text{ kgm/s}$$

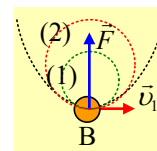
Ενώ η διεύθυνση του $\Delta \vec{p}$ σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , όπου:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{p_0}{p_1} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{4}{3}$$

iii) Η συνισταμένη δύναμη στη θέση Β, ίση με τη δύναμη του ελατηρίου, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου έχοντας μέτρο:

$$\Sigma F = \frac{mv_1^2}{R} \quad (1)$$

Όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στη θέση Β, η οποία **δεν** ταυτίζεται με το μήκος του ελατηρίου. Η τροχιά δεν είναι κυκλική και ένα μικρό τμήμα της στο Β μπορεί να προσεγγιστεί με κάποιο κύκλο (1) ή (2) ή... όπως στο σχήμα. Κατά συνέπεια δε μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη και στη συνέχεια τη σταθερά του ελατηρίου από την σχέση (1). Τι κάνουμε; Αλλάζουμε πορεία!



Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική οπότε στο σύστημα σφαίρα-ελατήριο η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, ενώ στο Β το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l = x = 0,2m$:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$
$$k = \frac{m(v_0^2 - v_1^2)}{x^2} = \frac{0,2(4^2 - 3^2)}{0,2^2} \text{ N/m} = 35 \text{ N/m}$$

dmargaris@gmail.com