Άλλο ένα στάσιμο κύμα…

Πάνω σε μια χορδή μήκους 10m έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x-y, όπου σε ένα σημείο Ο, που απέχει 3m από το αριστερό άκρο του και είναι κοιλία, θεωρούμε x=0, ενώ θεωρούμε t=0 τη στιγμή που το σημείο Ο βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του, ίση με 0,4m. Έτσι η εξίσωση του στάσιμου παίρνει τη μορφή:

$$y = 2A\,\text{συν}\left(\frac{\pi x}{2} + \phi_0\right) \cdot \eta\mu(2\pi t + \theta_0) \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

i) Να βρεθούν τα φ_0, θ_0 και Α.

ii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.

iii) Να σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:

α) $t_1=0$ και β) $t_2=0,75s$

Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου Ο, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

iv) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, δύο σημείων Β και Γ, που βρίσκονται στις θέσεις $x_1=1,5m$ και $x_2=3,5m$ αντίστοιχα, στους ίδιους άξονες.

Απάντηση:

i) Αφού στο Ο έχουμε κοιλία, το πλάτος ταλάντωσής του είναι ίσο με 2Α=0,4m άρα Α=0,2m.

Εξάλλου το πλάτος αυτό είναι $A' = |2A\cdot\text{συν}(\pi x/2+\varphi_0)| = 2A$ ή

$$\text{συν}\varphi_0=1 \text{ ή } \varphi_0=0$$

Η απομάκρυνση δηλαδή του Ο δίνεται από την εξίσωση:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t + \theta_0) \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

αλλά για t=0 παίρνουμε:

$$0,4=0,4\cdot\eta\mu\theta_0 \text{ ή}$$

$$\eta\mu\theta=1 \rightarrow \theta_0=\pi/2 \text{ rad}$$

Έχουμε τελικά δηλαδή την εξίσωση του στάσιμου να παίρνει τη μορφή:

$$y = 0,4\,\text{συν}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(μονάδες στο S.I.)} \ (1)$$

ii) Δεσμοί είναι στις θέσεις όπου το πλάτος $A' = |2A\cdot\text{συν}(\pi x/2)|$ γίνεται ίσο με μηδέν. Άρα

$$\text{συν}(\pi x/2)=0 \text{ ή}$$

$$\pi x/2=(2k+1)\cdot\pi/2 \text{ ή}$$

$$x=2k+1$$

Εξάλλου το x αυτό πρέπει να είναι σημείο της χορδής, άρα:

$$-3 \le x \le 7 \text{ ή}$$

$$-3 \le 2k+1 \le 7 \text{ ή}$$

$$-2 \le k \le 3$$

Κατά συνέπεια οι θέσεις των κοιλιών είναι: -3m, -1m, 1m, 3m, 5m και 7m.

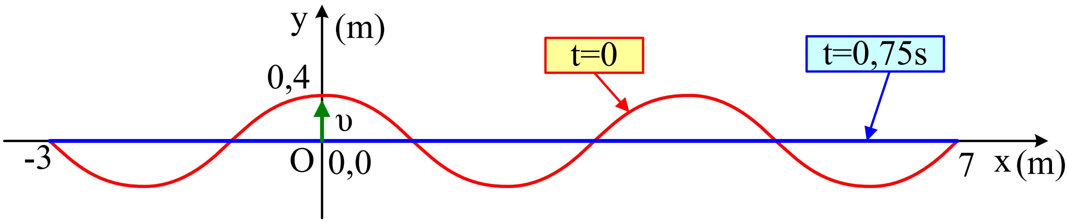
iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) t=0 παίρνουμε:

$$y= 0,4\ συν(\frac{\pi x}{2})\cdot συν(2\pi t) = 0,4\cdot συν(\frac{\pi x}{2})\cdot συν0 = 0,4\ συν(\frac{\pi x}{2}) \quad (2)$$

Ενώ αντίστοιχα για t=0,75s παίρνουμε:

$$y= 0,4\ συν(\frac{\pi x}{2})\cdot συν(2\pi t) = 0,4\cdot συν(\frac{\pi x}{2})\cdot συν1,5\pi = 0 \quad (3)$$

Άρα τα αντίστοιχα στιγμιότυπα είναι όπως στο διάγραμμα:



Για t=0 το σημείο Ο βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνσή του, συνεπώς έχει μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου για t=0,75s το σημείο Ο κινείται προς τα πάνω και στο διάγραμμα έχει σχεδιαστεί η ταχύτητα ταλάντωσής του.

iv) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε για το σημείο Β:

$$y= 0,4\ συν(\frac{\pi x}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) = 0,4\ συν(\frac{\pi 1,5}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) \ \ ή$$

$$y=0,4\ συν(\frac{3\pi}{4})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) = 0,4\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) \ \ ή$$

$$y=-0,2\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) = 0,2\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(2\pi t+\frac{3\pi}{2}) \quad (S.I.)$$

Αντίστοιχα για το σημείο Γ έχουμε:

$$y= 0,4\ συν(\frac{\pi x}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) = 0,4\ συν(\frac{\pi 3,5}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) \ \ ή$$

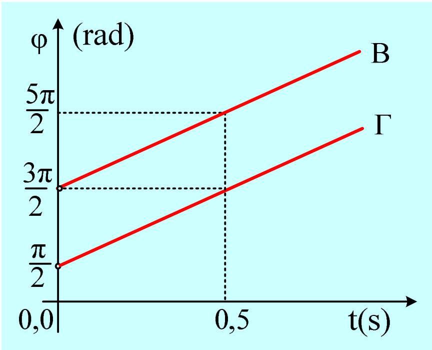
$$y=0,4\ συν(\frac{7\pi}{4})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) = 0,4\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) \ \ ή$$

$$y= 0,2\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(2\pi t+\frac{\pi}{2}) \quad (S.I.)$$

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις για τις φάσεις των σημείων έχουμε:

$$\varphi_B = 2\pi t+\frac{3\pi}{2} \quad και \quad \varphi_Γ = 2\pi t+\frac{\pi}{2}$$

Και οι γραφικές αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι οι παρακάτω:



Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης