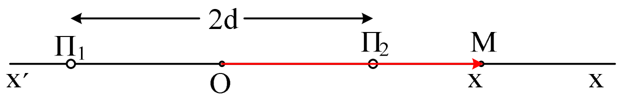
Συμβολή δύο κυμάτων στην ίδια διεύθυνση

Θεωρούμε δύο πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1, Π_2 σ' ένα γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο. Οι πηγές απέχουν απόσταση $2d$. Αρχή μέτρησης των αποστάσεων θεωρούμε το σημείο Ο, που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των δύο πηγών, ενώ θετική φορά για τον άξονα χ'χ λαμβάνουμε προς τα δεξιά. Αρχή μέτρησης του χρόνου $(t=0)$ θεωρούμε τη χρονική στιγμή που αρχίζουν να ταλαντώνονται εγκάρσια οι δύο πηγές, με την ίδια συχνότητα f και το ίδιο πλάτος A, εκτελώντας ΑΑΤ της μορφής: $y = A\eta\mu\omega t$.

Στις περιοχές του χχ΄ που δεν βρίσκονται ανάμεσα στις δύο πηγές τα κύματα που προέρχονται από τις δύο πηγές διαδίδονται κατά την ίδια διεύθυνση και φορά.



Έστω τυχαίο σημείο Μ του ελαστικού μέσου σε απόσταση χ από το Ο, δεξιά της Π_2. Οι εξισώσεις ταλάντωσης του Μ λόγω των δύο κυμάτων που φθάνουν σ' αυτό από τις πηγές Π_1, Π_2 δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$y_1 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x+d}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}) \quad \text{όπου} \quad t \geq \frac{x+d}{\upsilon}$$

$$y_2 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x-d}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}) \quad \text{όπου} \quad t \geq \frac{x-d}{\upsilon}$$

Η συνολική απομάκρυνση του Μ υπολογίζεται από την αρχή της επαλληλίας:

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}) + \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda})\right]$$

Με βάση τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$, η πιο πάνω σχέση γράφεται:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda}}{2}\eta\mu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{-2\frac{2\pi d}{\lambda}}{2})\eta\mu(\frac{2\frac{2\pi t}{T} - 2\frac{2\pi x}{\lambda}}{2}) \Leftrightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi d}{\lambda}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

$$\text{όπου} \quad t \geq \frac{x+d}{\upsilon}$$

Η τελευταία σχέση εμφανίζει και χρονική και τοπική περιοδικότητα στη φάση, αφού: $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$. Άρα αντιστοιχεί σε κύμα ίδιας συχνότητας με τη συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν, του οποίου το πλάτος: $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi d}{\lambda}\right|$ εξαρτάται από την απόσταση $2d$ μεταξύ των πηγών.

Παρατήρηση

Για τα σημεία που περιλαμβάνονται μεταξύ των δύο πηγών, τα κύματα συμβάλλουν έχοντας ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά. Τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή;

Σχηματίζεται στάσιμο; Μάλλον όχι.

Αν σχηματίζονταν στάσιμο, η ενέργεια θα παγιδευόταν μεταξύ των δεσμών, με αποτέλεσμα δεξιά της Π_2 και αριστερά της Π_1 να διαδίδεται μόνο ένα κύμα. Κάτι τέτοιο φαίνεται να μην ισχύει, αφού σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας τα κύματα διαδίδονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και ως εκ τούτου στο διάστημα μεταξύ των πηγών η μελέτη πρέπει να βασίζεται στη συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο εγκάρσια κύματα με ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 4cm$, ίδια συχνότητα και ίδιο πλάτος, διαδίδονται κατά μήκος του άξονα χ'χ με αντίθετη φορά και συμβάλλουν. Τα κύματα ξεκίνησαν ταυτόχρονα από δύο πηγές Π_1, Π_2 ίδιας φάσης, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους $D = 2d = 16cm$. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων το σημείο Ο, μέσο της απόστασης των δύο πηγών και ως αρχή μέτρησης του χρόνου $(t=0)$ τη στιγμή που τα κύματα συναντώνται στο σημείο Ο $(y=0, v>0)$. Πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 μένουν συνεχώς ακίνητα και πόσα εκτελούν ταλάντωση μέγιστου πλάτους;

Απάντηση:

Έστω ένα σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 που εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους. Για το σημείο αυτό ισχύει ότι: $r_1 - r_2 = k\lambda = 4\kappa$ όπου $k \in Z$. Επίσης: $r_1 + r_2 = d$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2r_1 = d + k\lambda \Rightarrow r_1 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = 8 + 2k \quad \text{όπου } k \in Z.$$

Όμως:

$$0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le 8 + 2k \le 16 \Rightarrow -8 \le 2k \le 8 \Rightarrow -4 \le k \le 4 \Rightarrow$$
$$k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

Άρα υπάρχουν 9 σημεία που εκτελούν ταλάντωση μέγιστου πλάτους σε αποστάσεις από την πηγή Π_1:

$$r_1 = 0, 2cm, 4cm, 6cm, 8cm, 10cm, 12cm, 14cm, 16cm$$

Ή αλλιώς στις θέσεις:

$$-8cm, -6cm, -4cm, -2cm, 0, 2cm, 4cm, 6cm, 8cm$$

που συμπίπτουν με τις κοιλίες ($x_k = \kappa \dfrac{\lambda}{2} = 2\kappa, -4 \le \kappa \le 4, \kappa \in \mathbb{Z}$) του «υποθετικού στάσιμου» μεταξύ των πηγών.

Έστω ένα σημείο Η του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 που παραμένει συνεχώς ακίνητο. Για το σημείο αυτό ισχύει ότι: $r_1 - r_2 = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} = (2\kappa+1)\cdot 2$ όπου $k \in Z$.

Επίσης: $r_1 + r_2 = d$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2r_1 = d + (2k+1)\cdot 2 \Rightarrow r_1 = 8 + 2k + 1 \Rightarrow r_1 = 9 + 2k \text{ όπου } k \in Z .$$

Όμως:

$$\begin{aligned} &0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le 9 + 2k \le 16 \Rightarrow -9 \le 2k \le 7 \Rightarrow -4,5 \le k \le 3,5 \Rightarrow \\ &k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 8 σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα σε αποστάσεις από την πηγή Π_1:

$$r_1 = 1cm, 3cm, 5cm, 7cm, 9cm, 11cm, 13cm, 15cm$$

Ή αλλιώς στις θέσεις:

$$-7cm, -5cm, -3cm, -1cm, 1cm, 3cm, 5cm, 7cm$$

που συμπίπτουν με τους δεσμούς ($x_\delta = (2\kappa+1)\dfrac{\lambda}{4} = 2\kappa+1, -4,5 \le \kappa \le 3,5, \kappa \in \mathbb{Z}$) του «υποθετικού στάσιμου» μεταξύ των πηγών.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης