Διακρότημα τόσο στην κυματομορφή όσο και στο στιγμιότυπο

Θεωρούμε μια οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους, Έστω $Σ_1Σ_2$ ένα τμήμα της χορδής μήκους d=2m. Την στιγμή t=0 ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους A=0,5cm γωνιακής συχνότητας $ω_1$=21π rad/s και ταχύτητας διάδοσης υ=1 m/s φτάνει στο σημείο $Σ_1$ με φορά διάδοσης από το $Σ_1$ προς το $Σ_2$. Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο $Σ_2$ φτάνει ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος, την ίδια ταχύτητα διάδοσης και γωνιακή συχνότητα $ω_2$=19π rad/s διαδιδόμενο από το $Σ_2$ προς το $Σ_1$.

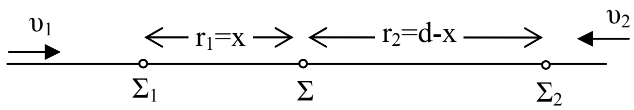
Υποθέτουμε ότι τα σημεία $Σ_1$και $Σ_2$ την στιγμή t=0 έχουν ταχύτητες παράλληλες και ομόρροπες.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του, συναρτήσει του χρόνου, ενός σημείου Σ του ευθυγράμμου τμήματος $Σ_1Σ_2$ που απέχει απόσταση x από το σημείο $Σ_1$, από την στιγμή 2s και μετά.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος $Σ_1Σ_2$ από την στιγμή 0 έως την στιγμή 4s (κυματομορφή).

γ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος $Σ_1Σ_2$ συναρτήσει της απόστασής τους από το σημείο $Σ_1$την χρονική στιγμή t=4s.

Απάντηση:



Η περίοδος και το μήκος κύματος για κάθε κύμα είναι:

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2}{21}\,s\,,\;T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2}{19}\,s\,,\;\lambda_1=\upsilon T_1=\frac{2}{21}m\,,\;\;\lambda_2=\upsilon T_2=\frac{2}{19}m$$

Κάθε κύμα για να διαδοθεί σε απόσταση d χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{d}{\upsilon}=2s$.

Επομένως από την στιγμή t=2s και μετά όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $Σ_1Σ_2$ κινούνται υπό την επίδραση και των δύο κυμάτων.

Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των σημείων $Σ_1$ και $Σ_2$ συναρτήσει του χρόνου είναι

$$y_1=Αημ(\omega_1 t)\ \text{και dfs}\ y_2=Αημ(\omega_2 t)$$

Επομένως οι εξισώσεις των δύο κυμάτων για τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $Σ_1Σ_2$ είναι:

$$y_1=Αημ2\pi\left(\frac{t}{T_1}-\frac{r_1}{\lambda_1}\right)=0,5ημ2\pi\left(\frac{21t}{2}-\frac{21r_1}{2}\right)=0,5ημ(21\pi t-21\pi r_1)=0,5ημ(21\pi t-21\pi x)\Rightarrow$$

$$\boxed{y_1=0,5ημ(21\pi t-21\pi x)},\ (x\to m,\ y\to cm,\ t\to s).\qquad (1)$$

$$y_2=Αημ2\pi\left(\frac{t}{T_2}-\frac{r_2}{\lambda_2}\right)=0,5ημ2\pi\left(\frac{19t}{2}-\frac{19r_1}{2}\right)=0,5ημ(19\pi t-19\pi r_2)\Rightarrow$$

$$y_2=0,5ημ\left[19\pi t-19\pi(2-x)\right]=0,5ημ(19\pi t+19\pi x-38\pi)=0,5ημ(19\pi t+19\pi x)\Rightarrow$$

$$\boxed{y_2 = 0,5\eta\mu(19\pi t + 19\pi x)},\ (x\to m,\ y\to cm,\ t\to s). \qquad (2)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου από την θέση ισορροπίας του, με την επίδραση των δύο κυμάτων, είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν διαδιδόταν κάθε κύμα χωριστά. Συνεπώς

$$y = y_1 + y_2 = 0,5\eta\mu(21\pi t - 21\pi x) + 0,5\eta\mu(19\pi t + 19\pi x) \Rightarrow$$

$$y = \eta\mu\frac{21\pi t - 21\pi x + 19\pi t + 19\pi x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi t - 21\pi x - 19\pi t - 19\pi x}{2} \Rightarrow$$

$$y = \eta\mu(20\pi t - \pi x)\sigma\upsilon\nu(\pi t - 20\pi x),\ (x\to m,\ y\to cm,\ t\to s). \qquad (3)$$

β) Στο μέσον Μ του ευθυγράμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ τα κύματα φτάνουν την στιγμή t_1=1s.

Από την στιγμή 1s και μετά κινείται σύμφωνα με την σχέση (3)

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) x=1m έχουμε:

$$y = \eta\mu(20\pi t - \pi)\sigma\upsilon\nu(\pi t - 20\pi) \Rightarrow y = -\eta\mu(20\pi t)\sigma\upsilon\nu(\pi t),\ (y\to cm,\ t\to s) \qquad (4)$$

Οι παράγοντες $\eta\mu(20\pi t)$ και $\sigma\upsilon\nu(\pi t)$ έχουν περιόδους $T = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,2s$ και $T' = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$.

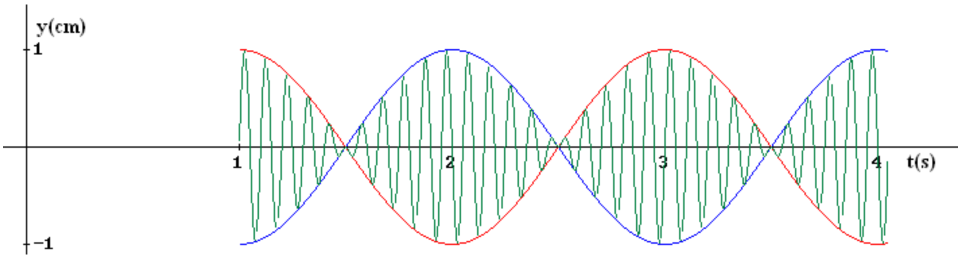
Επομένως ο παράγοντας $\sigma\upsilon\nu(\pi t)$ μεταβάλλεται αργά σε σχέση με τον παράγοντα $\eta\mu(20\pi t)$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η σχέση (4) περιγράφει μια ιδιόμορφη ταλάντωση περιόδου 0,2s με αργά μεταβαλλόμενο παράγοντα πλάτους $A' = -\sigma\upsilon\nu(\pi t)$.

Για τον παράγοντα πλάτους Α΄ ισχύει ο επόμενος πίνακας τιμών

t(s)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Α΄(cm)	1	0	-1	0	1	0	-1

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουν με κόκκινο χρώμα είναι η γραφική παράσταση του Α΄, με μπλε χρώμα του –Α΄ και με πράσινο χρώμα της y(t).



γ) Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) t=4s έχουμε:

$$y = \eta\mu(40\pi - \pi x)\sigma\upsilon\nu(4\pi - 20\pi x) \Rightarrow$$

$$y = -\eta\mu(\pi x)\sigma\upsilon\nu(20\pi x),\ (x\to m,\ y\to cm). \qquad (5)$$

Οι παράγοντες $\sigma\upsilon\nu(20\pi x)$ και $\eta\mu(\pi x)$ έχουν περιόδους $\lambda = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,2m$ και $\lambda' = \frac{2\pi}{\pi} = 2m$.

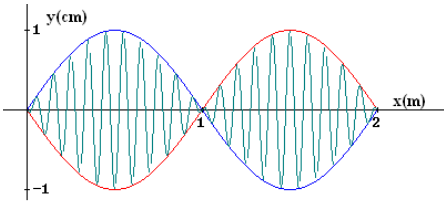
Επομένως ο παράγοντας $\eta\mu(\pi x)$ μεταβάλλεται αργά σε σχέση με τον παράγοντα $\sigma\upsilon\nu(20\pi x)$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η σχέση (5) περιγράφει μια ιδιόμορφη περιοδική συνάρτηση χωρικής περιόδου 0,2m με αργά μεταβαλλόμενο παράγοντα πλάτους $A' = -\eta\mu(\pi x)$.

Για τον παράγοντα πλάτους Α΄ ισχύει ο επόμενος πίνακας τιμών

x(m)	0	0,5	1	1.5	2
Α΄(cm)	0	-1	0	1	0

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουν με κόκκινο χρώμα είναι η γραφική παράσταση του Α΄, με μπλε χρώμα του –Α΄ και με πράσινο χρώμα της y(x).



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης