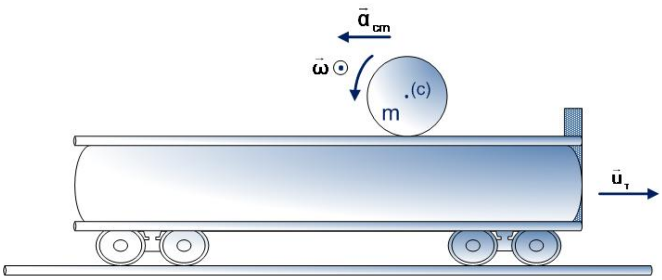
Κύλιση Κυλίνδρου Κατά Μήκος Πλατφόρμας η οποία Κινείται - Εξισώσεις Κινηματικής

Στην πλατφόρμα ενός τραίνου που κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_τ$ προς τα δεξιά, ηρεμεί κυλινδρικό σώμα ακτίνας r=40cm. Τη χρονική στιγμή t=0, ο κύλινδρος αρχίζει να κυλάει προς τα πίσω χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων.}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν ο συνολικός χρόνος κίνησης του κυλίνδρου, μέχρι να εγκαταλείψει τη πλατφόρμα, είναι t_1=40s και η συνολική γωνία που διαγράφει φ=50rad, να υπολογιστούν ως προς ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο τραίνο:

α) το μήκος της πλατφόρμας του τραίνου

β) η γωνιακή επιτάχυνση και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

γ) η γωνιακή ταχύτητα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που εγκαταλείπει τη πλατφόρμα

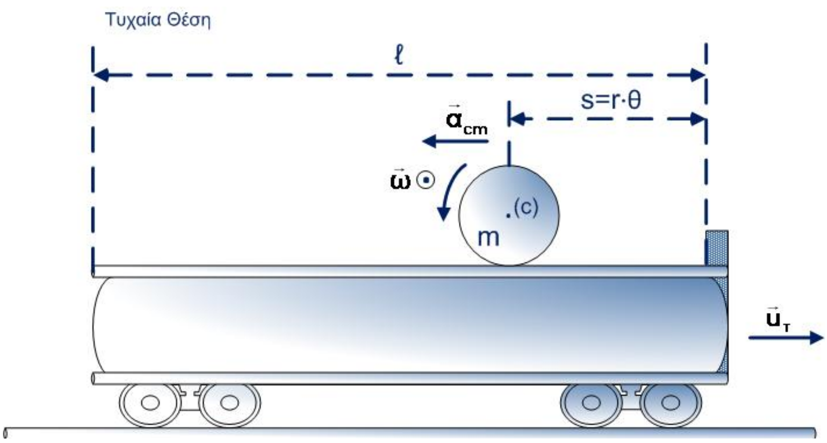
δ) ο αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου, ως τη στιγμή που εγκαταλείπει την πλατφόρμα

Αν η απόσταση που έχει διανύσει το τρένο, μέχρι να πέσει ο κύλινδρος από την πλατφόρμα, είναι x_1=30m

ε) να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία κινείται το τρένο

στ) να σχεδιαστούν οι γραφικές: ω=f(t), $α_{γων.}$=f(t) και θ=f(t), μέχρι τι στιγμή που το κυλινδρικό σώμα εγκαταλείπει την πλατφόρμα.

Απάντηση:



- **Τραίνο**

Το τραίνο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{u_τ}$. Οπότε το διάστημα που διανύει το τρένο θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{x_\tau = u_\tau \cdot t \ \ (1)}$$

- **Κυλινδρικό σώμα**

Προσοχή! ***Η μελέτη της κίνησης του κυλίνδρου γίνεται ως προς παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται πάνω στο τραί-νο, οπότε βλέπει τη πλατφόρμα να είναι ακίνητη.***

Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.}}$. Οπότε γι' αυτόν θα ισχύουν οι εξής σχέσεις (αρχικά ο κύλινδρος ηρεμεί $\boldsymbol{\omega_0 = 0}$) :

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t \Rightarrow \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu.} t \ \ (2)}$$

$$\boldsymbol{\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2 \ \ (3)}$$

$$\mathbf{u_{cm} = \boldsymbol{\omega} \cdot r \ \ (4)}$$

Σχόλιο! ***Αν η μελέτη της κίνησης του κυλίνδρου γίνεται από παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται στο έδαφος, τότε για τη ταχύτητα του σημείου επαφής του κυλίνδρου με την πλατφόρμα θα γράφαμε (θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά):***

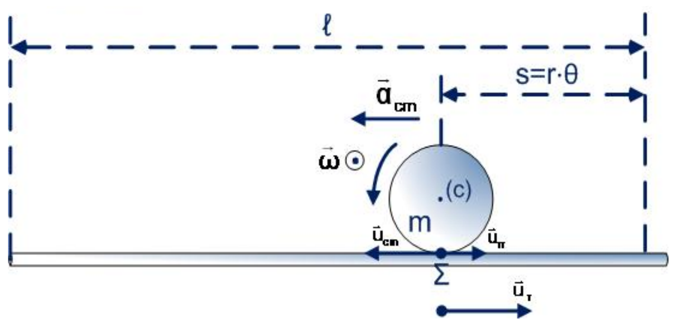
$$\mathbf{u_\Sigma = -u_{cm} + u_\pi}$$

Όμως ο κύλινδρος, για να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει $\Rightarrow u_\Sigma = u_\tau$. ***Αρά η ταχύτητα του κέντρου μά-ζας του θα ήταν:***

$$\boldsymbol{u_{cm} = u_\pi - u_\tau = \omega r - u_\tau}$$

Επιπλέον για την επιτάχυνση θα είχαμε τα εξής:

$$\boldsymbol{\alpha_\Sigma = -\alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon\pi} \xrightarrow{u_\Sigma = u_\tau = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \alpha_\Sigma = 0} \alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon\pi} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot r}$$



$$\boldsymbol{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot r \ \ (5)}$$

$$\mathbf{s_{cm} = r \cdot \boldsymbol{\theta} \ \ (6)}$$

α. Έστω ℓ το μήκος της πλατφόρμας του τραίνου. Όταν ο κύλινδρος εγκαταλείπει την πλατφόρμα, το κέ-ντρο του έχει διανύσει απόσταση ℓ και η συνολική γωνία που έχει διαγράψει είναι φ (από τα δεδομένα της άσκησης). Επομένως από την σχέση (6) θέτοντας $\mathbf{s_{cm}=\boldsymbol{\ell}}$ και $\boldsymbol{\theta=\varphi}$, θα έχουμε:

$$s_{cm} = r \cdot \theta \xrightarrow{s_{cm}=\ell,\ \theta=\varphi} \boldsymbol{\ell = r \cdot \varphi \Rightarrow \ell = (0.4 \cdot 50)m \Rightarrow \ell = 20m}$$

β. Γωνιακή επιτάχυνση ⇒ στη σχέση (3) θέτουμε $\boldsymbol{\theta=\varphi}$ και $\mathbf{t=t_1}$. Οπότε:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2 \xrightarrow{\theta=\varphi \text{ και } t=t_1} \varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t_1^2 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{2\varphi}{t_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.}} = \frac{\mathbf{2\cdot 50}}{\mathbf{40^2}}\mathbf{rad/s^2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.}} = \mathbf{0.06\,rad/s^2}$$

Επιτάχυνση του κέντρου μάζας ⇒ από τη σχέση (5) θα έχουμε:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu.}\cdot r \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm}} = \mathbf{(0.06\cdot 0.4)\,m/s^2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm}} = \mathbf{0.024\,m/s^2}$$

γ. Γωνιακή ταχύτητα (την χρονική στιγμή t_1) ⇒ στη σχέση (2) θέτουμε **ω=ω$_1$** και **t=t$_1$**. Άρα:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu.}t \xRightarrow{\omega=\omega_1, t=t_1, \alpha_{\gamma\omega\nu.}=\frac{2\varphi}{t_1^2}} \boldsymbol{\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu.}t_1} \text{ ή } \boldsymbol{\omega_1 = \frac{2\varphi}{t_1^2}t_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\varphi}{t_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega_1} = \frac{\mathbf{2\cdot 50}}{\mathbf{40}}\mathbf{rad/s} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1} = \mathbf{2.5\,rad/s}$$

Ταχύτητα του κέντρου μάζας (την χρονική στιγμή t_1) ⇒ στη σχέση (4) θέτουμε **u_{cm}=u_{cm1}** και **ω=ω$_1$**. Οπό-τε:

$$u_{cm} = \omega\cdot r \xRightarrow{u_{cm}=u_{cm1}, \omega=\omega_1, \omega_1=\frac{2\varphi}{t_1}} \mathbf{u_{cm1}} = \boldsymbol{\omega_1}\cdot\mathbf{r} \text{ ή } \mathbf{u_{cm}} = \boldsymbol{\frac{2\varphi r}{t_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_{cm1}} = \mathbf{(2.5\cdot 0.4)m/s} \Rightarrow \mathbf{u_{cm1}} = \mathbf{1m/s}$$

δ. Αριθμός περιστροφών (έως τη χρονική στιγμή t_1) ⇒ έστω **n** ο αριθμός των περιστροφών, μέχρι ο κύλινδρος να εγκαταλείψει την πλατφόρμα:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Σε } \mathbf{1} \text{ περιστροφή ο κύλινδρος διαγράφει γωνία } \mathbf{2\pi}\\ \text{Σε } \mathbf{n} \text{ περιστροφές ο κύλινδρος διαγράφει γωνία } \boldsymbol{\varphi}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\varphi} \Rightarrow \mathbf{n} = \boldsymbol{\frac{\varphi}{2\pi}} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{6.28}}\textbf{περιστροφές} \Rightarrow \mathbf{n \cong 8}\ \textbf{περιστροφές}$$

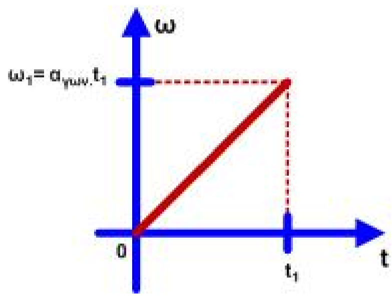
ε. Ταχύτητα του τρένου ⇒ στη σχέση (1) θέτω **x$_\tau$=x$_1$** και **t=t$_1$.** Οπότε:

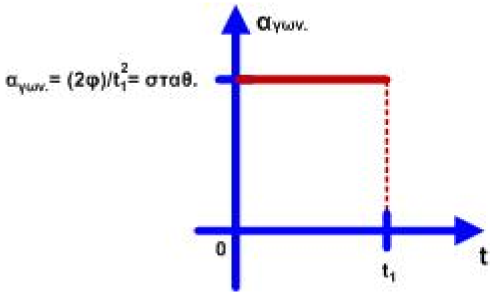
$$x_\tau = u_\tau\cdot t \xRightarrow{x_\tau=x_1, t=t_1} x_1 = u_\tau\cdot t_1 \Rightarrow \boldsymbol{u_\tau} = \boldsymbol{\frac{x_1}{t_1}} \Rightarrow \boldsymbol{u_\tau} = \frac{\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{40}}\mathbf{m}}{\mathbf{s}} \Rightarrow \boldsymbol{u_\tau} = \mathbf{0.75m/s}$$

στ. Γραφικές Παραστάσεις

Γωνιακή Ταχύτητα

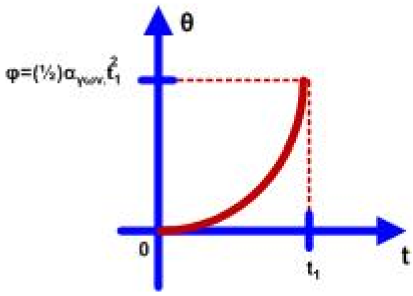
$$\boldsymbol{\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu.}t} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{t = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0} \\ \mathbf{t = t_1 \Rightarrow \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu.}t_1} \end{cases}$$





Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{2\varphi}{t_1^2} = \sigma\tau\alpha\theta.}$$



Γωνία που διαγράφει ο κύλινδρος

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.}t^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ t = t_1 \Rightarrow \theta = \varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.}t_1^2 \end{cases}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής