Κύλιση χωρίς ολίσθηση, u=u$_{cm}$ και στιγμιαίος άξονας περιστροφής.

Ένας συμπαγής ομογενής δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με το επίπεδό του κατακόρυφο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας u_{cm}.

i) Πόσα και ποια σημεία της περιφέρειας του δίσκου έχουν ταχύτητα μέτρου ίσου με το μέτρο τη ταχύτητας του κέντρου μάζας (ως προς παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος);

ii) Ποια σημεία του δίσκου *(ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος τους;)* έχουν ταχύτητα με μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας (ως προς παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος);

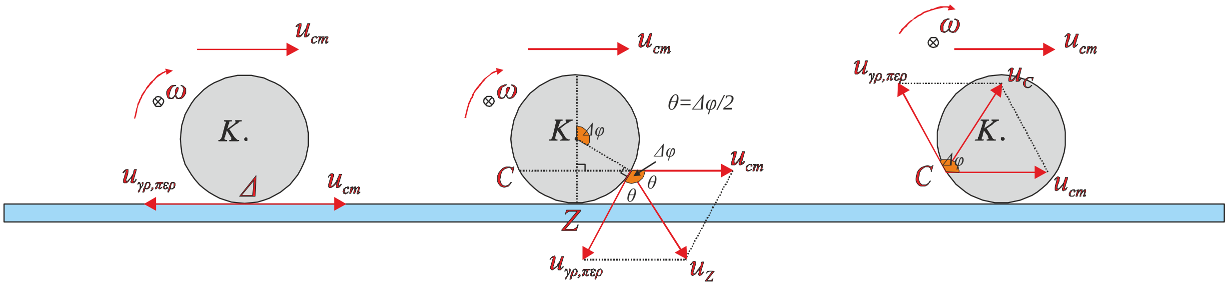
<u>Σημείωση</u>: Προφανώς η περίπτωση 2 καλύπτει και την περίπτωση 1. Την ξεχώρισα ωστόσο γιατί μπορεί να απαντηθεί από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Απάντηση:

Α. Με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας

Θεωρούμε την κύλιση χωρίς ολίσθηση επαλληλία μια μεταφορικής κίνησης του δίσκου με $\vec{u}_{cm}$ και μιας περιστροφικής κίνησης με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από (νοητό) άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου του δίσκου ως προς παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος μπορεί να υπολογιστεί από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης και της γραμμικής ταχύτητας που έχει λόγω περιστροφικής κίνησης:

$$\vec{u} = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{\gamma\rho}$$



Εφόσον ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η ταχύτητα του σημείου επαφής με το δάπεδο (*Δ στο σχήμα)* είναι μηδενική και επομένως ισχύει

$$0 = u_{cm} - u_{\gamma\rho,\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow u_{cm} = u_{\gamma\rho,\pi\varepsilon\rho}$$

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ζ της περιφέρειας του δίσκου το οποίο έχει για τον ακίνητο παρατηρητή ταχύτητα με μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Η γωνίες που σημειώνονται με Δφ στο σχήμα είναι ίσες μεταξύ τους γιατί είναι αμβλείες και έχουν τις πλευρές τους κάθετες μεταξύ τους. Το τρίγωνο των ταχυτήτων είναι ισόπλευρο αφού $u_{cm}=u_{\gamma\rho,\pi\varepsilon\rho}=u_Z$ επομένως $\theta=60^O$. Είναι $\Delta\varphi=2\theta=120^0$. *(Οι δύο γωνίες που σημειώνονται με θ είναι ίσες γιατί το* *παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος και στον ρόμβο η διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες).* Το ίδιο ισχύει για το σημείο C που βρίσκεται στο άλλο άκρο της οριζόντιας χορδής στην οποία ανήκει το Z.

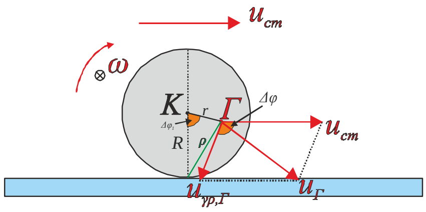
Τελικά λοιπόν υπάρχουν δύο σημεία (τα Z και C) στην περιφέρεια του δίσκου με μέτρο ταχύτητας (ως προς ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος) όσο και το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Αναλυτικά θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα αυτό ως εξής:

$$u^2 = u_{cm}^2 + u_{\gamma\rho,\pi\varepsilon\rho}^2 + 2u_{cm}u_{\gamma\rho,\pi\varepsilon\rho}\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow 1 = 1 + 1 + 2\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = 120^0$$

Αναζητούμε τώρα σημεία που απέχουν από το κέντρο του κύκλου απόσταση r<R όπου R η ακτίνα του κύκλου και τα οποία έχουν ταχύτητα με μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Δεν ισχύει πλέον $u_{\gamma\rho,\Gamma}=u_{cm}$ γιατί το Γ δεν ανήκει στην περιφέρεια του δίσκου. Αντ' αυτού έχουμε:



$$u_{\gamma\rho,\Gamma} = \omega \cdot r = \frac{u_{cm}}{R} \cdot r = u_{cm} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $u_{cm}=\omega R$.

Έχουμε:

$$u_\Gamma^2 = u_{cm}^2 + u_{\gamma\rho,\Gamma}^2 + 2u_{cm}u_{\gamma\rho,\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow u_\Gamma^2 = u_{cm}^2 + \left[u_{cm}\left(\frac{r}{R}\right)\right]^2 + 2u_{cm} \cdot u_{cm}\left(\frac{r}{R}\right)\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow$$
$$1 = 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right)\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right) + 2\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi)\right] = 0 \Rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) = -\frac{r}{2R}$$

Η σχέση αυτή για r=R καταλήγει στο αποτέλεσμα της πρώτης μας περίπτωσης.

Οι χρωματισμένες με πορτοκαλί χρώμα γωνίες στο σχήμα έχουν τις πλευρές τους κάθετες και είναι η μία οξεία και η άλλη αμβλεία. Επομένως είναι παραπληρωματικές και άρα ισχύει :

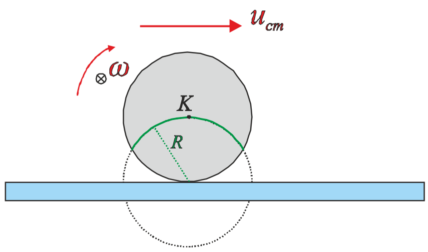
$$\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) = \sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi_1)$$

Υπολογίζουμε την απόσταση ρ του σημείου Γ από το σημείο επαφής με το δάπεδο:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 + 2\cdot R\cdot r\cdot \sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi_1) = R^2 + r^2 + 2\cdot R\cdot r\cdot \sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi) \Rightarrow$$
$$\rho^2 = R^2 + r^2 + 2\cdot \cancel{R}\cdot r\cdot\left(-\frac{r}{2\cancel{R}}\right) \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$$

Δηλαδή όλα τα σημεία που έχουν ταχύτητα μέτρου u_{cm} απέχουν από το δάπεδο απόσταση ίση με την ακτίνα του δίσκου, επομένως ο γεωμετρικός τους τόπος είναι τόξο κύκλου με κέντρο το σημείο επαφής με το δάπεδο και ακτίνα ίση με την ακτίνα του δίσκου:

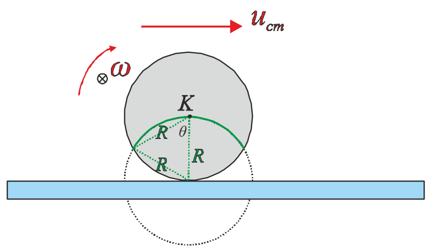
Θα πει κανείς: Πώς σκεφτήκαμε να υπολογίσουμε την απόσταση από το σημείο επαφής με το δάπεδο; Για



να είμαι ειλικρινής έτσι:

Β. Με χρήση του στιγμιαίου άξονα περιστροφής

Θεωρούμε τη σύνθετη κίνηση του δίσκου ως καθαρή στροφική κίνηση γωνιακής ταχύτητας μέτρου ω γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής ο οποίος διέρχεται από το σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου.



Αναζητούμε σημεία με $u=u_{cm}$ οπότε έχουμε:

$$u_{\gamma\rho} = u_{cm} \Rightarrow \omega\cdot R_1 = \omega\cdot R \Rightarrow R_1 = R$$

όπου R_1 η απόσταση των σημείων από τον στιγμιαίο άξονα (δηλ. από το σημείο επαφής με το δάπεδο) και R η ακτίνα του δίσκου.

Από το ισόπλευρο τρίγωνο του σχήματος είναι φανερό ότι $\theta=60^o$.

Καταλήξαμε δηλαδή στο ίδιο αποτέλεσμα με σαφώς λιγότερο κόπο.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια

Σταύρος Ε. Πρωτογεράκης