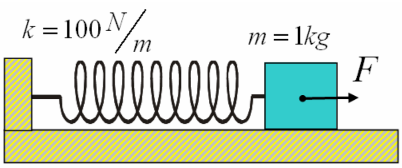
Ρυθμοί μεταβολής στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Το σώμα του σχήματος βρίσκεται πάνω σε λεία σανίδα συνδεδεμένο με ιδανικό ελατήριο. Κινούμενο συναντά αντίσταση $F_{αντ}$ = -b.υ , όπου υ η ταχύτητά του και $b = 2\sqrt{3}\frac{N.s}{m}$. Δεχόμενο περιοδική δύναμη F εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με πλάτος 0,2 m και κυκλική συχνότητα ω = 5 rad/s. Κάποια στιγμή μετά τη σταθεροποίηση του πλάτους βρίσκεται στη θέση x= + 0,1 m και πλησιάζει την θέση ισορροπίας.

i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την δύναμη αντίστασης εκείνη την στιγμή.
ii) Υπολογίσατε την επιτάχυνση και την δύναμη του διεγέρτη την εν λόγω στιγμή.
iii) Με ποιο ρυθμό προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα εκείνη την στιγμή;
iv) Ποιος είναι την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου;
v) Ποιος είναι την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος και ποιος ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω της αντίστασης;

Απάντηση:

i) Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα από τη σχέση $\omega^2 A^2 = \omega^2 x^2 + \upsilon^2$ αφού την αποδείξουμε πρώτα.

$$x^2 = A^2 \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \quad (1)$$

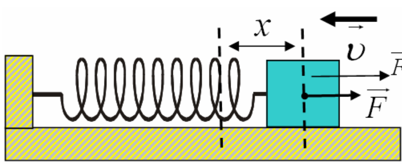
και

$$\upsilon^2 = \omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \omega^2 x^2 + \upsilon^2 = \omega^2 A^2\left[\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o)\right] \Rightarrow \omega^2 A^2 = \omega^2 x^2 + \upsilon^2$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 5\sqrt{\frac{4-1}{100}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

Επειδή το x είναι θετικό και πλησιάζει την θέση ισορροπίας καταλαβαίνουμε ότι . $\upsilon < 0$



Επομένως $\upsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$

$$F_{αντ} = -b.\upsilon = -2\sqrt{3}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)N \Rightarrow F_{αντ} = +3N$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει φορά όπως στο σχήμα.

ii) Η επιτάχυνση στην ταλάντωση σταθερού πλάτους είναι $a = -\omega^2 x = -25.\frac{1}{10}\frac{m}{s^2} = -2,5\frac{m}{s^2}$

Ισχύει ότι $\sum F = m.a \Rightarrow F + F_{αντ} + F_{επ} = m.a \Rightarrow F - b.\upsilon - k.x = m.a \Rightarrow F = b.\upsilon + k.x + m.a$

$$\Rightarrow F = -3N + 100\frac{1}{10} - 2,5N \Rightarrow F = +4,5N$$

Το θετικό πρόσημο σημαίνει ότι έχει φορά προς τα δεξιά.

iii) Η δύναμη F προσφέρει ενέργεια με ρυθμό:

$$\frac{dW_F}{dt}=\frac{F.dx}{dt}=F.\upsilon=-4,5\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{J}{s}=-2,25\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Η F λοιπόν αφαιρεί ενέργεια μια και αντιτίθεται στην κίνηση.

iv) Η δύναμη του ελατηρίου παράγει έργο $dW_{F\varepsilon\lambda}=F_{\varepsilon\lambda}dx=-k.x.dx$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μεταβάλλεται κατά $dU_{\varepsilon\lambda}=-dW_{F\varepsilon\lambda}=k.x.dx$

$$\Rightarrow\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}=\frac{k.x.dx}{dt}=k.x.\upsilon=100.\frac{1}{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{J}{s}=-5\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

v) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{\left(\sum F\right)dx}{dt}=\left(\sum F\right)\upsilon=m.a.\upsilon=1.(-2,5)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{J}{s}=1,25\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Η μηχανική λοιπόν ενέργεια μεταβάλλεται με ρυθμό

$$\frac{dK}{dt}+\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}=-3,75\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω της αντίστασης είναι;

$$\frac{dW_{\alpha\pi}}{dt}=\frac{|F_{\alpha\nu\tau}dx|}{dt}=|F_{\alpha\nu\tau}\upsilon|=3\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{J}{s}=1,5\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Παρατήρηση:

Ένας ενεργειακός ισολογισμός δείχνει ότι οι απώλειες λόγω δράσης της F και λόγω αντίστασης είναι

$2,25\sqrt{3}\frac{J}{s}+1,5\sqrt{3}\frac{J}{s}=3,75\sqrt{3}\frac{J}{s}$ όση και η μείωση της μηχανικής ενέργειας.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος