

Συμβολή στη ...συμβολή κυμάτων.

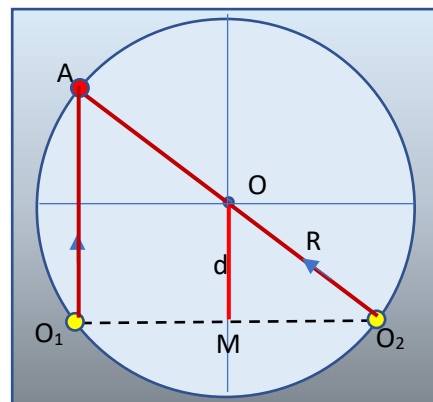
Στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού, βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων O_1 και O_2 , οι οποίες την $t=0$ ξεκινούν να εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις με εξισώσεις: $\Psi_1 = A\eta\mu 2\pi t$ (SI) και $\Psi_2 = A\eta\mu 2\pi t$ (SI) και οι οποίες διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα $v=50$ cm/s και σταθερό πλάτος.

Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι $D=4$ m. Με κέντρο σημείο O στην επιφάνεια του υγρού και στην μεσοκάθετο της O_1O_2 σε απόσταση $d=1,5$ m από το μέσον M της O_1O_2 , θεωρούμε κύκλο ακτίνας $R=OO_1$.

- 1) Τι είδους κίνηση εκτελούν τα σημεία της επιφάνειας του υγρού, λόγω της συμβολής των κυμάτων.
- 2) Η O_2O προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο σε σημείο A . Να εξηγήσετε τι συμβαίνει στο σημείο A για $t>0$:
 - α) χωρίς τη χρήση του γνωστού "τύπου" της διαφοράς δρόμων σε σχέση με το μήκος κύματος, των δύο κυμάτων.
 - β) με χρήση του προαναφερόμενου τύπου.
- 3) α) Πόσες υπερβολές (κροσσοί) ενίσχυσης και πόσες απόσβεσης δημιουργούνται μεταξύ των πηγών (μη συμπεριλαμβανομένων αυτών).
β) Το σημείο A ανήκει σε κάποια από τις υπερβολές που βρήκατε προηγουμένως;
Αν ναι, να προσδιορίσετε το σημείο της O_1O_2 που η υπερβολή αυτή την τέμνει
- 4) Ποιο σημείο της επιφάνειας του υγρού θα εκτελέσει πρώτο κίνηση, που θα οφείλεται στο φαινόμενο της συμβολής και ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό.
- 5) Για ποιες τιμές της συχνότητας των πηγών με όρια από $0,125$ Hz έως $0,75$ Hz το σημείο A θα παραμένει ακίνητο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 1) Από τη στιγμή που σε σημείο του μέσου θα φτάσουν τα δύο κύματα αρχίζει το φαινόμενο της συμβολής και:
 - α) τα σημεία της επιφάνειας του υγρού που η διαφορά αποστάσεων τους από τις δύο πηγές είναι ακέραιο πολ/σιο του μήκους κύματος θα εκτελούν κατακόρυφη ταλάντωση πλάτους $2A$ και συχνότητας ίδιας με των πηγών.
 - β) τα σημεία της επιφάνειας του υγρού που η διαφορά αποστάσεων τους από τις δύο πηγές είναι περιττό πολ/σιο του μισού μήκους κύματος θα παραμένουν διαρκώς ακίνητα.
 - γ) Όλα τα άλλα σημεία που δεν πληρούν τις προηγούμενες προϋποθέσεις θα κάνουν ταλάντωση με πλάτος A : $0 < A' < 2A$



2) Από τις εξισώσεις των πηγών προκύπτει: $\omega = 2\pi r/s$ άρα $T = 2\pi/\omega = 1s$

Έτσι : $\lambda = vT = 0,5m$

Στο παραπάνω σχήμα :

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο OMO_2 :

$$(OO_2) = R = \sqrt{d^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = \sqrt{6,25} \Rightarrow R = 2,5m. \text{ Άρα } (O_2A) = 5m$$

Η OM συνδέει μέσα πλευρών του ορθογώνιου τριγ. AO_1O_2 . Άρα $(AO_1) = 2d = 3m$

α) Για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_1 στο A απαιτείται :

$$t_1 = \frac{O_1A}{v} = \frac{3}{0,5} \Rightarrow t_1 = 6s$$

Για να φτάσει το κύμα από την πηγή O_2 στο A απαιτείται :

$$t_2 = \frac{O_2A}{v} = \frac{5}{0,5} \Rightarrow t_2 = 10s$$

Για $t < 6s$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα ,άρα το A ηρεμεί.

Για $6s < t < 10$ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή O_1 , οπότε το A ταλαντώνεται με πλάτος A

Για $t \geq 10s$ έχει φτάσει και το δεύτερο κύμα και εξελίσσεται το φαινόμενο συμβολής.

Από τη χρονική στιγμή $6s$ και μέχρι τη στιγμή $10s$ το A λόγω του κύματος

από την O_1 θα έχει εκτελέσει $n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{10-6}{1} = 4$ ταλαντώσεις ,άρα ενώ

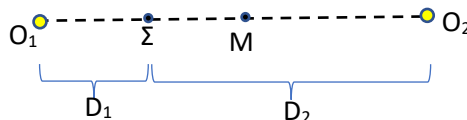
το A θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας με τάση κίνησης προς τα πάνω ,φτάνει και το 2° κύμα λόγω του οποίου αποκτά ίδια τάση κίνησης οπότε θα ταλαντωθεί με $\max$ πλάτος $2A$.

β) Μέσω της διαφοράς δρόμων και για $t \geq 10s$:

$$(O_1A) - (O_2A) = 3 - 5 = -2 \Rightarrow \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = \frac{-2}{0,5} = -4 \Rightarrow d_1 - d_2 = -4\lambda$$

άρα : $A' = 2A$

3) α) **Εύρεση των υπερβολών ενίσχυσης**



Θεωρούμε σημείο Σ της O_1O_2 από το οποίο περνά μια υπερβολή ενίσχυσης.

Ισχύει:

$$\frac{D_1 - D_2 = N\lambda}{D_1 + D_2 = D} \xrightarrow{+} 2D_1 = N\lambda + D \Rightarrow D_1 = \frac{N\lambda + D}{2} \Rightarrow D_1 = \frac{N \cdot 0,5 + 4}{2} \Rightarrow$$

$$D_1 = \frac{N}{4} + 2$$

$$\text{Πρέπει : } 0 < D_1 < 4 \Rightarrow 0 < \frac{N}{4} + 2 < 4 \Rightarrow -2 < \frac{N}{4} < 2 \Rightarrow -8 < N < 8$$

Άρα : $N = -7, -6, \dots, -1, 0, 1, \dots, 6, 7$ **Σύνολο υπερβολών ενίσχυσης $N_e = 15$**

Εύρεση των υπερβολών απόσβεσης

Θεωρούμε σημείο Σ της O_1O_2 από το οποίο περνά μια υπερβολή απόσβεσης.

Ισχύει:

$$\frac{D_1 - D_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}}{D_1 + D_2 = D} \xrightarrow{+} 2D_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + D \Rightarrow D_1 = \frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda + D}{2} \Rightarrow$$

$$D_1 = \frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + 4}{2} \Rightarrow D_1 = \frac{N}{2} + \frac{1}{8} + 2 \Rightarrow D_1 = \frac{N}{4} + \frac{17}{8}$$

Πρέπει :

$$0 < D_1 < 4 \Rightarrow 0 < \frac{N}{4} + \frac{17}{8} < 4 \Rightarrow -\frac{17}{8} < \frac{N}{4} < 4 - \frac{17}{8} \Rightarrow -\frac{17}{2} < N < \frac{15}{2} \Rightarrow -8,5 < N < 7,5$$

Άρα : $N = -8, -7, -6, \dots, -1, 0, 1, \dots, 6, 7$ **Σύνολο υπερβολών απόσβεσης $N_a = 16$**

β) Για το σημείο A βρήκαμε ότι πάλλεται με $\max$ πλάτος και ανήκει στην υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με $N = -4$ Έστω λοιπόν ότι η υπερβολή αυτή τέμνει την O_1O_2 σε σημείο Σ για το οποίο θα ισχύει:

$$\frac{(\Sigma O_1) - (\Sigma O_2) = -4\lambda}{(\Sigma O_1) + (\Sigma O_2) = 4} \xrightarrow{+} 2(\Sigma O_1) = -4\lambda + 4 \Rightarrow 2(\Sigma O_1) = -4 \cdot 0,5 + 4 \Rightarrow$$

$$(\Sigma O_1) = 1m$$

4) Συμβολή σ'ένα σημείο του μέσου θα συμβεί αφού φτάσουν και τα δύο κύματα στο σημείο. Το σημείο που πρώτο θα ξεκινήσει την κίνησή του λόγω συμβολής είναι αυτό που η μεγαλύτερη των αποστάσεων από τις πηγές είναι η μικρότερη δυνατή. Άρα εν προκειμένω **το ζητούμενο σημείο είναι το M** και ο χρόνος που θα ξεκινήσει είναι:

$$t = \frac{(O_1 M)}{v} = \frac{2}{0,5} \Rightarrow t = 4s$$

5) Για να παραμένει ακίνητο το σημείο A θα πρέπει να ανήκει σε κάποιο κροσσό απόσβεσης, άρα θα ισχύει:

$$(O_2 A) - (O_1 A) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2 = (2N+1)\frac{v}{2f} \Rightarrow 4f = (2N+1)0,5 \Rightarrow f = \frac{2N+1}{8} \text{ (I)}$$

$$\text{Θέλουμε: } 0,125 \leq f \leq 0,750 \Rightarrow 0,125 \leq \frac{2N+1}{8} \leq 0,750 \Rightarrow 1 \leq 2N+1 \leq 6 \Rightarrow$$

$$0 \leq 2N \leq 5 \Rightarrow 0 \leq N \leq 2,5 \text{ Άρα } N = 0, 1, 2$$

$$\text{για } N = 0 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{8} \text{ Hz}$$

$$\text{Από την (I)} \Rightarrow \text{για } N = 1 \Rightarrow f_2 = \frac{3}{8} \text{ Hz}$$

$$\text{για } N = 2 \Rightarrow f_3 = \frac{5}{8} \text{ Hz}$$

Παντελεήμων Παπαδάκης
15/12/2022