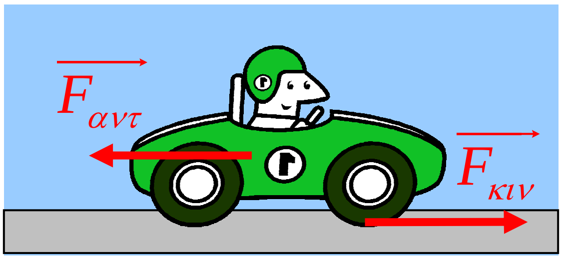
Σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Το λάθος:



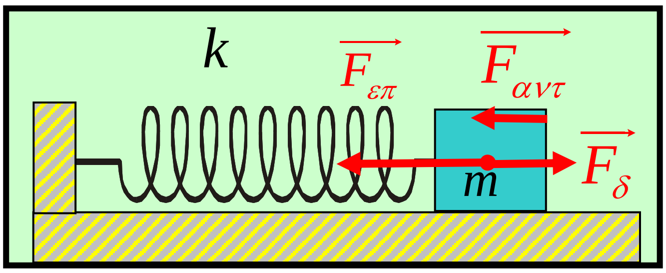
Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα η κινητήρια δύναμη εξουδετερώνει την αντίσταση. Οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο.
Φυσικά όση ενέργεια αφαιρεί η αντίσταση τόση ενέργεια προσφέρει ο κινητήρας.
Η δράση του κινητήρα εξουδετερώνει την αντίσταση.

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση (μετά από ένα χρονικό διάστημα) το πλάτος σταθεροποιείται. Όση ενέργεια χάνει το σύστημα σε μια περίοδο τόση προσφέρει ο διεγέρτης στον ίδιο χρόνο.
Μπορούμε να πούμε ότι η δράση του διεγέρτη εξουδετερώνει την αντίσταση.
Η αναλογία με την περίπτωση του αυτοκινήτου μπορεί να μας παρασύρει και να πούμε ότι οι δυο δυνάμεις είναι αντίθετες. Είναι όμως ; Όπως θα δούμε είναι αντίθετες μόνο όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

Σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ας δούμε το πρόβλημα στην γενική του μορφή.
Το, αρχικά ακίνητο, σώμα του σχήματος είναι συνδεδεμένο με ιδανικό ελατήριο και συναντά κατά την κίνησή του αντίσταση που έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα και μέτρο ανάλογο της ταχύτητας.
Ισχύει δηλαδή ότι $F_{αντ} = -b.υ$
Κατάλληλος διεγέρτης ασκεί δύναμη που μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο, δηλαδή:

$$F_δ = F_o ημ(ωt + θ)$$



Αρχικά το πλάτος είναι μικρό και τελικά , μετά την πάροδο των λεγομένων μεταβατικών φαινομένων, σταθεροποιείται σε μια τιμή A. Απ' εκεί και μετά ο διεγέρτης έχει επιβάλλει την κυκλική του συχνότητα ω.
Επομένως η θέση του σώματος μπορεί να γραφεί $x = A.ημ(ωt + φ)$. (Από μια χρονική στιγμή και μετά)
Στόχο έχουμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που δέχεται αν γνωρίζουμε τα $A, ω, φ$.

Υπολογισμοί.

Από τη σχέση $x = A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$ υπολογίζουμε ταχύτητα και επιτάχυνση.

$$\upsilon = A.\omega.\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi) \text{ και } a = -\omega^2 A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζουμε την δύναμη επαναφοράς , την αντίσταση και την συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

$$F_{\varepsilon\pi} = -k.x = -k.A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

$$F_{\alpha\nu\tau} = -b.\upsilon = -b.A.\omega.\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)$$

$$\sum F = m.a = -m\omega^2 A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

Φυσικά ισχύει ότι $\sum F = F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\delta} \Rightarrow F_{\delta} = \sum F - F_{\varepsilon\pi} - F_{\alpha\nu\tau}$

$$\Rightarrow F_{\delta} = -m\omega^2 A.\eta\mu(\omega t+\varphi) + k.A.\eta\mu(\omega t+\varphi) + b.A.\omega.\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow F_{\delta} = \left(k-m\omega^2\right)A.\eta\mu(\omega t+\varphi) + b.\omega.A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow F_{\delta} = A\left[\left(k-m\omega^2\right).\eta\mu(\omega t+\varphi) + b.\omega.\eta\mu\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Πως θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\left(k-m\omega^2\right).\eta\mu(\omega t+\varphi) + b.\omega.\eta\mu\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$;;;;

Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της σύνθεσης ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας και θέσης ισορροπίας.

$$\left(k-m\omega^2\right).\eta\mu(\omega t+\varphi) + b.\omega.\eta\mu\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = M.\eta\mu(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$$

Όπου $M = \sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2 + (b.\omega)^2 + 2\left(k-m\omega^2\right)b\omega\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2 + (b.\omega)^2}$

και $\varepsilon\varphi\Delta\varphi = \dfrac{b.\omega.\eta\mu\frac{\pi}{2}}{k-m\omega^2 + b.\omega.\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\Delta\varphi = \dfrac{b.\omega}{k-m\omega^2}$

Οπότε $\Rightarrow F_{\delta} = A\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2 + (b.\omega)^2}.\eta\mu(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$

Η δυνάμεις επομένως υπολογίζονται αν γνωρίζω τα A, ω, φ .

$$\sum F = m.a = -m\omega^2 A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

$$F_{\varepsilon\pi} = -k.x = -k.A.\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

$$F_{\alpha\nu\tau} = -b.\upsilon = -b.A.\omega.\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)$$

$$F_{\delta} = A\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2 + (b.\omega)^2}.\eta\mu(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$$

Ενδιάμεσα είχαμε δείξει ότι $F_\delta = \left(k - m\omega^2\right) A.\eta\mu\left(\omega t + \varphi\right) + b.\omega.A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi\right)$

Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_o^2$

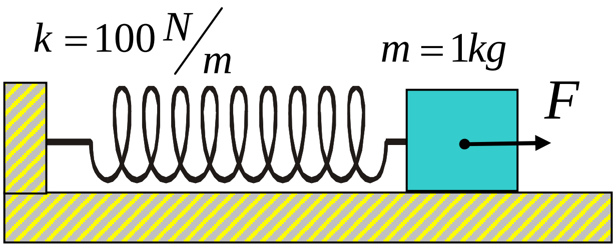
Οπότε έχουμε ότι $F_\delta = m\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) A.\eta\mu\left(\omega t + \varphi\right) + b.\omega.A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi\right)$

Από την τελευταία γίνεται φανερό το ότι αν $\omega = \omega_o$, δηλαδή έχουμε συντονισμό στον οποίο μεγιστοποιεί-ται η μέγιστη ταχύτητα, τότε $F_\delta = b.\omega.A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi\right) = -F_{\alpha\nu\tau}$

Σε αυτήν την περίπτωση οι δύναμη του διεγέρτη είναι αντίθετη της αντίστασης. **Σε κάθε άλλη περίπτωση οι δυνάμεις έχουν διαφορετικά μέτρα , όμως όσο έργο αφαιρεί η αντίσταση, σε χρόνο μιας περιόδου, τόσο προσφέρει η δύναμη του διεγέρτη.**

Η ισότητα (κατ' απόλυτη τιμή) των έργων δυο δυνάμεων (στη διάρκεια της περιόδου) δεν συνεπάγεται ισότητα των μέτρων τους, ούτε ότι κάθε στιγμή ο ρυθμός παραγωγής έργου (η ισχύς κάθε δύναμης) είναι αντίθετα.

Εφαρμογή



Το σώμα του σχήματος βρίσκεται πάνω σε λεία σανίδα συνδεδεμένο με ιδανικό ελατήριο. Κινούμενο συναντά αντίσταση $F_{\alpha\nu\tau} = -b.\upsilon$, όπου υ η ταχύτητά του και $b = 15\dfrac{N.s}{m}$. Δεχόμενο περιοδική δύναμη F εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με εξίσωση $x = 0,2.\eta\mu 5t \quad (S.I)$.

Να γραφούν οι εξισώσεις της ταχύτητας , της αντίστασης , της δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης του διεγέρτη.

Απάντηση:

$$\upsilon = A.\omega.\sigma\upsilon\nu\omega t = 0,2.5.\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow \upsilon = \sigma\upsilon\nu 5t \quad (S.I)$$
$$F_{\alpha\nu\tau} = -b.\upsilon = -15.\sigma\upsilon\nu 5t \quad (S.I)$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = -k.x = -20.\eta\mu 5t \quad (S.I)$$

Επειδή το σώμα εκτελεί ταλάντωση ισχύει για τη συνισταμένη:

$$\sum F = -m\omega^2 x = -5.\eta\mu 5t \quad (S.I)$$

Όμως $\sum F = F_{\varepsilon\lambda} + F_{\alpha\nu\tau} + F \Rightarrow F = \sum F - F_{\varepsilon\lambda} - F_{\alpha\nu\tau} = -5.\eta\mu 5t + 20.\eta\mu 5t + 15.\sigma\upsilon\nu 5t$

$$\Rightarrow F = 15\eta\mu 5t + 15.\sigma\upsilon\nu 5t \quad (S.I)$$

Έχουμε υπολογίσει την δύναμη αλλά ας την γράψουμε ως $F = F_o\eta\mu\left(\omega t + \theta\right)$

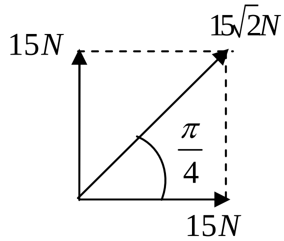
Θα ακολουθήσουμε την γνωστή τεχνική της σύνθεσης ταλαντώσεων.

Γράφουμε τη δύναμη ως άθροισμα ημιτόνων

$$F = 15\eta\mu 5t + 15.\sigma\upsilon\nu 5t = 15\eta\mu 5t + 15.\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I)}$$

$$F_o = \sqrt{15^2 + 15^2 + 2.15.15\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \sqrt{15^2.2} = 15\sqrt{2}N$$

Επίσης $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{15.\eta\mu\frac{\pi}{2}}{15 + 15.\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ ή $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$



Η δεύτερη λύση απορρίπτεται εύκολα από το σχήμα με τα στρεφόμενα διανύσματα.

Οπότε $F = 15\sqrt{2}.\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ (S.I)

Η πρόσθεση ειδικά εδώ που το ημ και το συν είχαν ίδιους συντελεστές θα μπορούσε να γίνει με χρήση του τύπου:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Δηλαδή: $F = 15\left[\eta\mu 5t + \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 15.2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}.\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}.\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ (S.I)

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος