Το πλάτος και η διαφορά φάσης στο στάσιμο κύμα.

Στα άκρα Α και Β μιας ομογενούς χορδής ΑΒ μήκους l=64cm που έχει την διεύθυνση του άξονα x'ox υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων, που ταλαντώνονται με εξίσωση $y_A = y_B = A\eta\mu\omega t$ (S.I.). Τα δύο αρμονικά κύματα διαδιδόμενα με αντίθετες φορές συμβάλλουν τη χρονική στιγμή t=0 στο μέσο Ο της χορδής που θεωρείται και η αρχή του άξονα $x'ox(x = 0)$. Από τη συμβολή των δύο αρμονικών κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στο σημείο Ο δημιουργείται κοιλία. Ένα σημείο Ζ της χορδής (X_Z= -24cm) αρχίζει να ταλαντώνεται και μετά από χρόνο Δt=1,5s τετραπλασιάζεται η ενέργεια ταλάντωσης του. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Ζ γίνεται μέγιστη 20 φορές σε χρόνο 5s. Όταν μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια του σημείου Ζ, η θέση του και η θέση του πλησιέστερου σε αυτό σημείου που επίσης έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα μήκους d=10cm.

Α. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ζ σε συνάρτηση με το χρόνο y_Z (t) και να γίνει η γραφική παράσταση της.

Β₁. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής y=f(x) τη χρονική στιγμή t=0,375s.

Β₂. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων της χορδής ΑΒ σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση Ο , φ=φ(x), τη χρονική στιγμή t=0,375s.

Β₃. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής ΑΒ σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση Ο, $|A'| = |A'|(x)$.

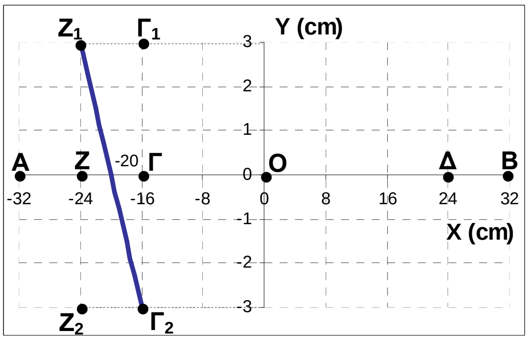
Γ. Να βρεθούν οι αποστάσεις που απέχουν από το σημείο Ο τα σημεία της χορδής, που μετά τη δημιουργία του στασίμου κύματος, ταλαντώνονται με ενέργεια ίση με το 25% της ενέργειας του σημείου Ζ και έχουν την ίδια φάση με αυτό. Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της χορδής ΑΒ έχουν την ίδια μάζα.

Απάντηση:

Α. Το κύμα που προέρχεται από την πηγή Α φθάνει στο σημείο $Z(x_Z = -24cm)$ όταν το κύμα από την πηγή Β φθάνει στο σημείο $\Delta(x_\Delta = +24cm)$.

Η ενέργεια ταλάντωσης του Ζ τετραπλασιάζεται όταν το κύμα από την πηγή Β συμβάλλει με αυτό της πηγής Α στο Ζ.

Άρα $E_T = 4E_A \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = 4\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |A'| = 2A$ (1). Δηλαδή το σημείο Ζ είναι κοιλία.



Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι:

$$\upsilon = \frac{(\Delta Z)}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\cdot 24}{1,5} \Rightarrow \upsilon = 32cm/s \Rightarrow \upsilon = 0,32m/s \ (2).$$

Επειδή η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του Ζ μεγιστοποιείται 20 φορές σε χρόνο 5s, το σημείο Ζ θα φθάνει σε ακραία θέση ισάριθμες φορές, άρα θα έχει εκτελέσει Ν=10 πλήρεις ταλαντώσεις.

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι $f = \frac{N}{t} \Rightarrow f = \frac{10}{5} = 2Hz \quad (3)$.

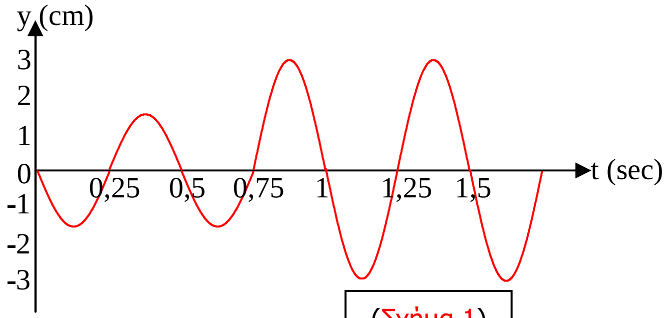
Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$\upsilon = f \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \lambda = 0,16m \quad (4)$.

Αν Γ είναι η πλησιέστερη προς το Ζ κοιλία, τότε όταν τα σημεία αυτά βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς τους (μέγιστης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης) $Γ_2$ και Z_1 αντίστοιχα, από το ορθογώνιο τρίγωνο

$\overset{\Delta}{Z_1 Z_2 Γ_2} : (Z_1Γ_2)^2 = (Z_1Z_2)^2 + (Z_2Γ_2)^2 \Rightarrow$

$d^2 = (4A)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \underset{(4)}{\Rightarrow} 10^2 = 16A^2 + 8^2 \Rightarrow A = 1,5cm \quad (5)$



(Σχήμα 1)

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigmaυν\frac{2\pi x}{\lambda}\etaμ\frac{2\pi t}{T} \underset{(5)}{\overset{(3)(4)}{\Longrightarrow}} y = 3\sigmaυν\frac{\pi x}{8}\cdot\etaμ4\pi t \, (6) \quad (t \text{ σε s και } x, y \text{ σε cm}).$$

Επειδή έχουμε ορίσει ως αρχή των χρόνων $(t = 0)$ τη χρονική στιγμή που τα δύο κύματα συμβάλλουν στο μέσο $O(x_{(0)} = 0)$, στο σημείο Ζ θα συμβάλλουν τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{|OZ|}{\upsilon} \overset{(2)}{\Longrightarrow} t_1 = \frac{0,24}{0,32} = 0,75s$. Μέχρι τότε το σημείο Ζ ταλαντώνεται υπό την επίδραση του κύματος που παράγει η πηγή Α. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ζ βρίσκεται ως εξής:

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα από την πηγή Α φθάνει στο μέσο Ο της ΑΒ και αυτό αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y_{(O)_A} = Α\etaμ\omega t$. Άρα το σημείο Ζ έχει εξίσωση ταλάντωσης:

$$y_Z = Α\etaμ\omega\left(t + \frac{|OZ|}{\upsilon}\right) \Rightarrow y_Z = Α\etaμ2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{|OZ|}{\lambda}\right) \Rightarrow \overset{(3),(4),(5)}{\Longrightarrow} y_Z = 1,5\etaμ2\pi\left(2t + \frac{24}{16}\right) \Rightarrow$$

$$y_Z = 1,5\etaμ(4\pi t + 3\pi) \quad (t \to s \text{ και } y_Z \to cm) \text{ για } 0 \le t \le 0,75s.$$

Μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στο Ζ και τη δημιουργία στάσιμου κύματος η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ζ είναι:

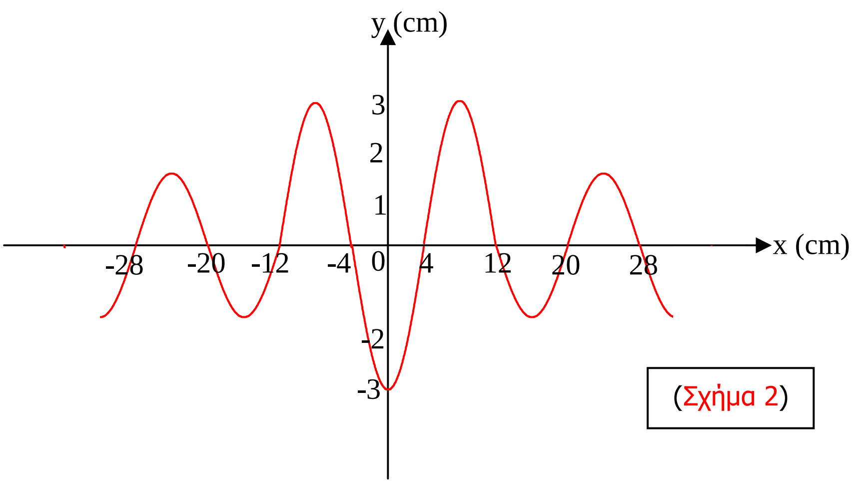
Από $(6) \overset{x=x_Z}{\Longrightarrow} y_Z = 3\sigmaυν\pi\frac{(-24)}{8}\etaμ4\pi t \Rightarrow y_Z = 3\sigmaυν(-3\pi)\etaμ4\pi t \Rightarrow y_Z = -3\etaμ4\pi t \Rightarrow y_Z = 3\etaμ(4\pi t + \pi)$

$(t \to s \text{ και } y_Z \to cm)$ για $t \ge 0,75s$. Η απομάκρυνση του σημείου Ζ σε συνάρτηση με το χρόνο απεικονίζεται στο (Σχήμα 1).

B₁. Τη χρονική στιγμή $t = 0,375\ s = \frac{3T}{4}$ τα κύματα έχουν συμβάλλει σε απόσταση $d = \upsilon \cdot t$ αριστερά και δεξιά του Ο.

Άρα $d \overset{(2)}{=} 32 \cdot 0,375 \Rightarrow d = 12cm$.

Επομένως στην περιοχή $-12cm \le x \le 12cm$ υπάρχει στάσιμο κύμα και οι περιοχές $-32cm \le x \le -12cm$ και $+12cm \le x \le +32cm$ της χορδής ταλαντώνονται μόνο υπό την επίδραση των κυμάτων που παράγουν οι πηγές Α και Β αντίστοιχα. Το στιγμιότυπο $y = f(x)$ της χορδής τη χρονική στιγμή $t = 0,375s$ απεικονίζεται στο (Σχήμα 2).



(Σχήμα 2)

B₂. Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι:

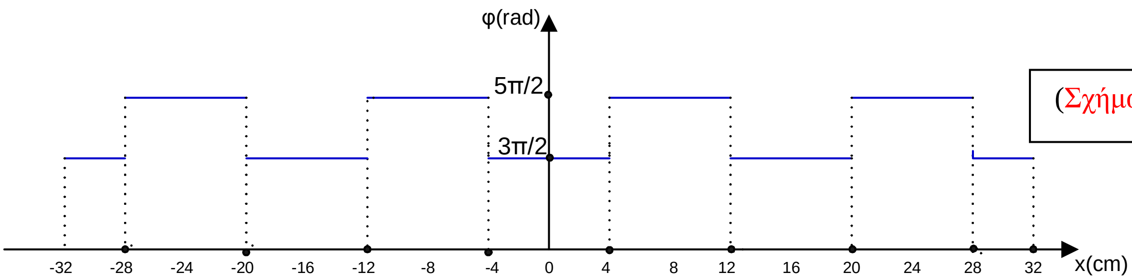
Αν $\text{συν}\frac{\pi x}{8} > 0$ η εξίσωση της ταλάντωσης γράφεται $y = 3\text{συν}\frac{\pi x}{8} \cdot \text{ημ}4\pi t$ και η φάση δίνεται από τη σχέση φ=4πt.

Αν $\text{συν}\frac{\pi x}{8} < 0$ η εξίσωση της ταλάντωσης γράφεται $y = -3\left|\text{συν}\frac{\pi x}{8}\right| \cdot \text{ημ}4\pi t \Rightarrow y = 3\left|\text{συν}\frac{\pi x}{8}\right| \cdot \text{ημ}(4\pi t + \pi)$

και η φάση δίνεται από τη σχέση φ=4πt+π.

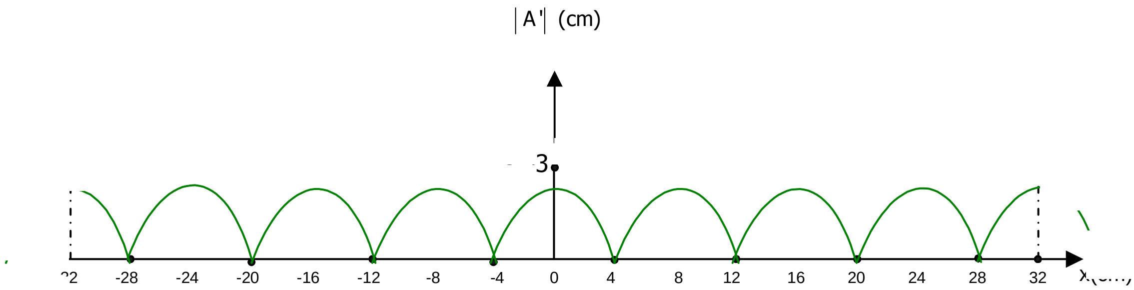
Θυμίζουμε ότι ο παράγοντας $\text{συν}\frac{\pi x}{8}$ αλλάζει πρόσημο ανά $\frac{T}{2}$ δηλαδή μετά από απόσταση $\frac{\lambda}{2}$ (σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση και σημεία εκατέρωθεν του ιδίου δεσμού και σε αποστάσεις μικρότερες από $\frac{\lambda}{2}$ από αυτόν έχουν διαφορά φάσης π).

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 0,375s$ οι φάσεις των διαφόρων σημείων μπορούν να παίρνουν τις τιμές $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ ή $\varphi=\frac{5\pi}{2}$. Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x απεικονίζεται στο (Σχήμα 3).



(Σχήμα 3)

Β₃. Το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής δίνεται από τη σχέση: $|A'| = 3\left|συν\frac{πx}{8}\right|$. Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής απεικονίζεται στο (Σχήμα 4).



Γ. Από την σχέση $E = 25\%\ E_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{2}D(2A)^2 \Rightarrow |A'| = A\ (7)$.

Από την $(6)\overset{(7)}{\underset{(5)}{\Longrightarrow}} 3\left|συν\frac{πx}{8}\right| = 1,5 \Rightarrow συν\frac{πx}{8} = \pm\frac{1}{2}\quad(8)$. Για το σημείο Ζ ισχύει ότι $συν\frac{πx_z}{8} < 0$, άρα για να έχουν τα ζητούμενα σημεία την ίδια φάση με το σημείο Ζ πρέπει $συν\frac{πx}{8} < 0$. Από την (8):

$$συν\frac{πx}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{πx}{8} = 2κπ \pm \frac{2π}{3} \Rightarrow x = 16κ \pm \frac{16}{3}\quad(9)\ \ με\ κ = 0,1,2...(x \to cm).$$

Επειδή πρέπει $-32cm \le x \le 32cm$ από την σχέση (9) προκύπτει ότι $x = \pm\frac{16}{3}cm,\ \pm\frac{32}{3}cm,\ \pm\frac{64}{3}cm,\ \pm\frac{80}{3}cm$.

Άρα οι αποστάσεις των σημείων αυτών από το Ο είναι $d = \frac{16}{3}cm,\ \frac{32}{3}cm,\ \frac{64}{3}cm$ και $\frac{80}{3}cm$.

ΣΧΟΛΙΑ

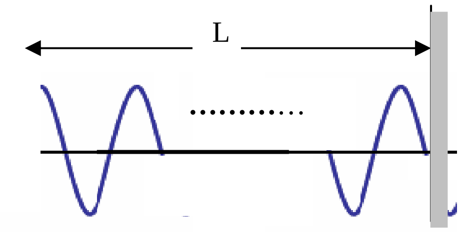
1. Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση που ως χρονική στιγμή t=0 ορίζεται η χρονική στιγμή που συναντώνται τα δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα, ο σχεδιασμός του στιγμιότυπου του στασίμου κύματος για οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t θα περιορίζεται στην περιοχή: $-υt<x<υt$ στην οποία θα έχουν συμβάλει τα δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα. Αριστερά της θέσης $x=-υt$ υπάρχει μόνο το προς τα δεξιά διαδιδόμενο αρμονικό κύμα και αντίστοιχα δεξιά της θέσης $x=+υt$ υπάρχει μόνο το προς τα αριστερά διαδιδόμενο αρμονικό κύμα.

2. Σε σχέση με το ερώτημα **Γ** υπενθυμίζεται ότι η απόσταση είναι η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης άρα έχει πάντα θετικές τιμές.

3. Με αφορμή αυτήν την ανάρτηση θέλω να αναφερθώ στο σχηματισμό στασίμου κύματος σε χορδή μήκους L όπου το ένα άκρο της είναι ακίνητο και στο άλλο ελεύθερο άκρο της μας **δίνεται** ότι σχηματίζεται **κοιλία**. Το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται στη χορδή ΟΑ υπολογίζεται ως εξής:

1ος τρόπος

Εάν θεωρήσουμε ότι ο δεσμός στη θέση Α είναι ο **κ τάξης** τότε:



$$x_\kappa=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow L=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \quad (1) \Rightarrow \ldots \kappa=\frac{2L}{\lambda}-\frac{1}{2} \text{ με } \kappa=0,1,2\ldots$$

Πχ. εάν κ=3 έχουν σχηματιστεί **4** δεσμοί (κ=0,1,2,3).

2ος τρόπος

Εάν θεωρήσουμε ότι στη χορδή ΟΑ σχηματίζονται **κ'** (πλήθος) δεσμοί τότε:

$$L=\frac{\lambda}{4}+(\kappa'-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \quad L=(2\kappa'-1)\frac{\lambda}{4} \quad (2) \Rightarrow \ldots \kappa'=\frac{2L}{\lambda}+\frac{1}{2} \text{ με } \kappa'=0,1,2,3\ldots$$

Πχ. εάν κ'=4 έχουν σχηματιστεί **4** δεσμοί. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν στη σχέση (2) θέσουμε κ'=κ-1 προκύπτει η σχέση (1).

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης