Το στάσιμο κύμα είναι ειδική περίπτωση συμβολής

Θεωρούμε μια οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους, Έστω $\Sigma_1\Sigma_2$ ένα τμήμα της χορδής μήκους d=36cm. Την στιγμή t=0 ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους A=5cm συχνότητας f=2Hz και ταχύτητας διάδοσης υ=48cm/s φτάνει στο σημείο Σ_1 με φορά διάδοσης από το Σ_1 προς το Σ_2. Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο Σ_2 φτάνει ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος την ίδια συχνότητα και το ίδιο μήκος κύματος διαδιδόμενο από το Σ_2 προς το Σ_1.

Υποθέτουμε ότι τα σημεία Σ_1και Σ_2 την στιγμή t=0 έχουν ταχύτητες παράλληλες και ομόρροπες

Α) Να εξηγήσετε γιατί μεταξύ των σημείων Σ_1 και Σ_2 θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχει ολοκληρωθεί η δημιουργία στασίμου κύματος σε ολόκληρο το τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$

Β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ως συνάρτηση της απόστασής τους από το σημείο Σ_1, μετά την χρονική στιγμή t_1.

Γ) Να υπολογίσετε το πλήθος και τις θέσεις των δεσμών που σχηματίζονται στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$.

Δ) Να υπολογίσετε το πλήθος και τις θέσεις των κοιλιών που σχηματίζονται στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$.

Ε) Να κάνετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των σημείων του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ως συνάρτηση της απόστασής τους από το σημείο Σ_1 τις στιγμές t_2=1s και t_3=1,125s

Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα αν την στιγμή t=0 τα σημεία Σ_1 και Σ_2 έχουν ταχύτητες παράλληλες και αντίρροπες.

Απάντηση

Α) Στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$ διαδίδονται δύο κύματα που έχουν ίδια διεύθυνση διάδοσης, ίδια διεύθυνση ταλάντωσης, ίδια συχνότητα, ίδιο πλάτος, ίδιο μήκος κύματος και αντίθετη φορά διάδοσης.. Επομένως στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$ θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.

Β) Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 24\text{cm}$.

Η εξίσωση της ταλάντωσης των σημείων Σ_1 και Σ_2 πριν την χρονική στιγμή t_1 είναι

$$y_1 = y_2 = A\eta\mu(\omega t)$$

Έστω Μ ένα σημείο του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ το οποίο απέχει απόσταση $r_1 = x$ από το Σ_1 και $r_2 = d - x$ από το Σ_2.

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, όταν θα έχει ολοκληρωθεί η συμβολή των δύο κυμάτων στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$, η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Μ θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$ έχουμε:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda}\right) \qquad (1)$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ είναι:

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right)\right| \Rightarrow A' = 10\left|\sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{x-18}{12}\right)\right| \Rightarrow A' = 10\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12} - \frac{3\pi}{2}\right)\right| \Rightarrow$$

$A' = 10\left|\eta\mu\frac{\pi x}{12}\right|$, x, A΄ σε cm.

Γ) Οι δεσμοί του στασίμου κύματος είναι σημεία απόσβεσης. Επομένως

$$A' = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{2x-d}{\lambda}\right) = N\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x - d = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$x_\Delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_\Delta = 12N + 24$, $N \in \mathbb{Z}$. x_Δ σε cm.

Εναλλακτικά: $r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x - (d-x) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$, $N \in \mathbb{Z}$

Πρέπει $0 \le x_\Delta \le d \Leftrightarrow 0 \le 12N + 24 \le 36 \Leftrightarrow -24 \le 12N \le 12 \Rightarrow -2 \le N \le 1$

Άρα σχηματίζονται 4 δεσμοί, οι οποίοι απέχουν από το σημείο Σ_1 αποστάσεις 0, 12, 24, 36 cm.

Δ) Οι κοιλίες του στασίμου κύματος είναι σημεία ενίσχυσης. Επομένως

$$A' = 2A \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{2x-d}{\lambda}\right) = N\pi \Leftrightarrow 2x - d = N\lambda \Leftrightarrow$$

$x_K = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_K = 12N + 18$, x_K σε cm, $N \in \mathbb{Z}$.

Εναλλακτικά: $r_1 - r_2 = (2N)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x - (d-x) = (2N)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2}$, $N \in \mathbb{Z}$.

Πρέπει $0 \le x_K \le d \Leftrightarrow 0 \le 12N + 18 \le 36 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le N \le \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \le N \le 1$, $N \in \mathbb{Z}$.

Άρα σχηματίζονται 3 κοιλίες οι οποίες απέχουν από το σημείο Σ_1 αποστάσεις 6, 18, 30 cm.

Παρατήρηση

Οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών μπορούν να βρεθούν και ως εξής:

Το μέσον του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ισαπέχει από τα σημεία Σ_1 και Σ_2. Συνεπώς είναι σημείο ενίσχυσης, δηλαδή κοιλία. Θεωρώντας ως αρχή το μέσον του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ οι θέσεις των κοιλιών είναι

$\overline{x}_K = N\frac{\lambda}{2} = 12N$. Πρέπει $-\frac{d}{2} \le \overline{x}_K \le \frac{d}{2} \Leftrightarrow -18 \le 12N \le 18 \Rightarrow -1 \le N \le 1$

Άρα σχηματίζονται 3 κοιλίες, οι οποίες απέχουν από το μέσον Μ αποστάσεις 0, 12 cm και επομένως από το Σ_1 αποστάσεις 6, 18, 30 cm.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και τις θέσεις των δεσμών.

Ε) Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) d=36cm, λ=24cm , T=0.5s έχουμε για τις απομακρύνσεις των σημείων του $\Sigma_1\Sigma_2$:

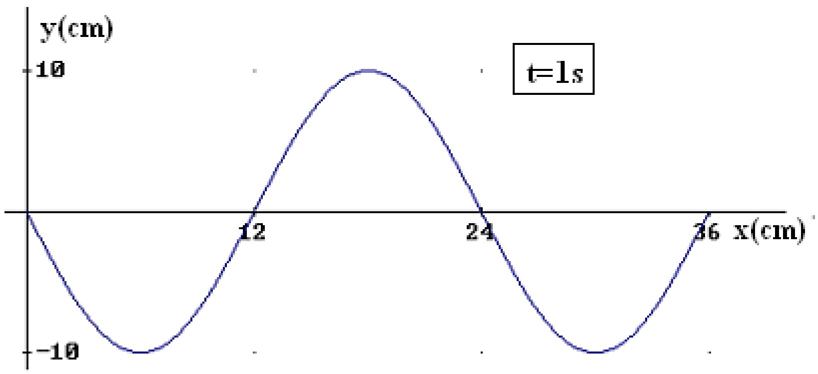
$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{2\lambda}\right) = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12}-\frac{3\pi}{2}\right)\eta\mu\left(4\pi t-\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

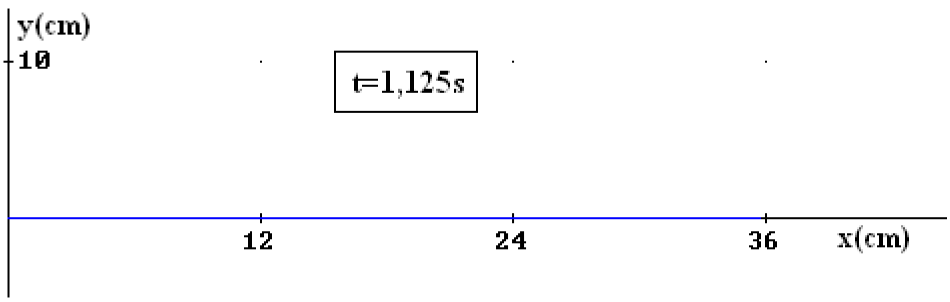
$$y = -10\eta\mu\left(\frac{\pi x}{12}\right)\sigma\upsilon\nu(4\pi t)$$

Την στιγμή t_2=1s $y = -10\eta\mu\left(\frac{\pi x}{12}\right)$ (x, y σε cm)

Την στιγμή t_3=1.25s y=0.

Η γραφικές παραστάσεις των παραπάνω σχέσεων στο διάστημα [0,36] είναι:





Έστω τώρα ότι την στιγμή t=0 οι ταχύτητες των Σ_1 και Σ_2 είναι παράλληλες και αντίρροπες.

Η εξίσωση της ταλάντωσης των σημείων Σ_1 και Σ_2 πριν την χρονική στιγμή t_1 είναι

$y_1 = A\eta\mu(\omega t)$ και $y_2 = -A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu(\omega t + \pi)$

Έστω Μ ένα σημείο του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ το οποίο απέχει απόσταση $r_1 = x$ από το Σ_1 και $r_2 = d - x$ από το Σ_2.

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) + \pi\right] = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, όταν θα έχει ολοκληρωθεί η συμβολή των δύο κυμάτων στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$, η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Μ θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right) \qquad (1)$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ είναι:

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right)\right|$$

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right)\right| \Rightarrow A' = 10\left|\sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{x-18}{12} + \frac{1}{2}\right)\right| \Rightarrow A' = 10\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12} - \pi\right)\right| \Rightarrow$$

$A' = 10\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{12}\right|$, x,A΄ σε cm.

Γ) Οι δεσμοί του στασίμου κύματος είναι σημεία απόσβεσης. Επομένως

$$A' = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{2x-d}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2} = N\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x - d = N\lambda \Leftrightarrow$$

$x_\Delta = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_\Delta = 12N + 18$, x_Δ σε cm, $N \in \mathbb{Z}$.

Άρα σχηματίζονται 3 δεσμοί, οι οποίοι απέχουν από το σημείο Σ_1 αποστάσεις 6, 18, 30 cm.

Δ) Οι κοιλίες του στασίμου κύματος είναι σημεία ενίσχυσης. Επομένως

$$A' = 2A \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda} + \frac{1}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{2x-d}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2} = N\pi \Leftrightarrow 2x - d = (2N-1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$x_K = (2N-1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_K = 12N + 12$, $N \in \mathbb{Z}$. x_Δ σε cm.

Πρέπει $0 \le x_K \le d \Leftrightarrow 0 \le 12N + 12 \le 36 \Leftrightarrow -12 \le 12N \le 24 \Rightarrow -1 \le N \le 2$

Άρα σχηματίζονται 4 κοιλίες, οι οποίες απέχουν από το σημείο Σ_1 αποστάσεις 0, 12, 24, 36 cm.

Ε) Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) d=36cm, λ=24cm , T=0.5s έχουμε για τις απομακρύνσεις των σημείων του $\Sigma_1\Sigma_2$:

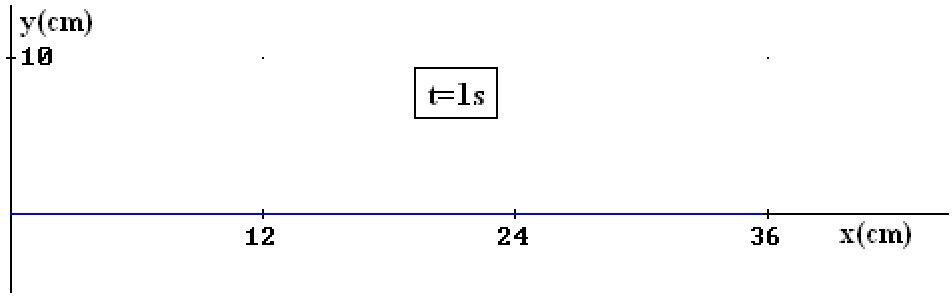
$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2x-d}{2\lambda}+\frac{1}{4}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{2\lambda}+\frac{1}{4}\right) = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12}-\pi\right)\eta\mu\left(4\pi t-\pi\right) \Rightarrow$$

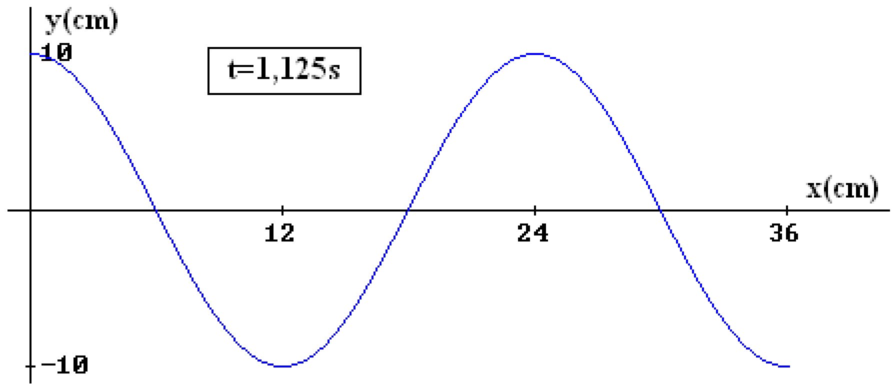
$$y = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12}\right)\eta\mu\left(4\pi t\right)$$

Την στιγμή t_3=1s y=0.

Την στιγμή t_2=1,125s $y = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{12}\right)$ (x, y σε cm).

Η γραφικές παραστάσεις των παραπάνω σχέσεων στο διάστημα [0,36] είναι:





<u>Παρατήρηση</u>

Η εξίσωση του στασίμου κύματος $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ δεν είναι η μοναδική.

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει με την προϋπόθεση ότι η αρχή του άξονα είναι κοιλία του στασίμου και την στιγμή t=0 η κοιλία αυτή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς την θετική κατεύθυνση.

Η γενική εξίσωση του στασίμου κύματος είναι $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_1\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_2\right)$.

Οι τιμές των $φ_1$, $φ_2$ εξαρτώνται τόσο από τις απομακρύνσεις των σημείων του μέσου την στιγμή t=0, όσο και από το σημείο του μέσου που επιλέχθηκε ως αρχή του άξονα.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης