

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ Ο ΜΠΕΡΔΕΜΕΝΟΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ
V: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ/ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ
ΣΥΜΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΥΝ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΑ ΚΑΙ
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

John W. Jewett Jr., California State Polytechnic University, Pomona, CA

Η ενέργεια είναι κρίσιμη έννοια για την επίλυση προβλημάτων φυσικής, συχνά ωστόσο είναι βασική πηγή σύγχυσης για τους σπουδαστές αν η παρουσίαση δεν είναι προσεκτικά δομημένη από τον καθηγητή ή το σχολικό εγχειρίδιο. Μια συνήθης προσέγγιση προβλημάτων που συμπεριλαμβάνουν περιστρεφόμενα ή παραμορφώσιμα συστήματα είναι η εφαρμογή του θεωρήματος έργου-κινητικής ενέργειας μαζί με ένα «θεώρημα ψευδοέργου-κινητικής ενέργειας» ή μια «εξίσωση για το κέντρο μάζας». Το άρθρο αυτό συζητά μια εναλλακτική μέθοδο που δεν χρησιμοποιεί καμία απ' αυτές τις εξισώσεις και επιτρέπει στους σπουδαστές μια περισσότερο οικουμενική και λιγότερο συγκεχυμένη προσέγγιση σε τέτοια προβλήματα. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε τρεις αντιπροσωπευτικές καταστάσεις από τη βιβλιογραφία.

Παραμορφώσιμα και περιστρεφόμενα συστήματα

Έχει γίνει σημαντική συζήτηση στη βιβλιογραφία¹⁻⁷ σχετικά με τις δυσκολίες μιας μεθόδου έργου-ενέργειας για την επίλυση προβλημάτων. Για προβλήματα στα οποία δυνάμεις εφαρμόζονται σε σωματίδια ή μη περιστρεφόμενα άκαμπτα αντικείμενα σε περιβάλλον χωρίς τριβή, η εφαρμογή του θεωρήματος έργου-κινητικής ενέργειας,

$$W = \Delta K \quad (1)$$

είναι ευθεία, με την K να συμβολίζει την κινητική ενέργεια του σωματιδίου ή του αντικειμένου. Στον ορισμό του έργου, όπως συζητήθηκε στο πρώτο άρθρο⁸ αυτής της σειράς, η μετατόπιση είναι αυτή του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Για ένα άκαμπτο, μη περιστρεφόμενο αντικείμενο, το οποίο θα αποκαλούμε από εδώ και πέρα *σωματίδιο* γιατί σαν τέτοιο μπορεί να προσομοιωθεί, αυτή η μετατόπιση είναι ίδια με τη μετατόπιση του σωματιδίου.

Θεωρείστε τώρα μια δύναμη που δρα πάνω σε παραμορφώσιμο αντικείμενο ή σε αντικείμενο που περιστρέφεται. Σ' αυτού του τύπου τα προβλήματα η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής μιας δύναμης πάνω στο σύστημα μπορεί να είναι διαφορετική από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του συστήματος. Γι' αυτού του τύπου τα προβλήματα έχουν προσφερθεί αρκετές προσεγγίσεις. Αρκετές συμπεριλαμβάνουν έναν φορμαλισμό στον οποίο ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα έχει ολοκληρωθεί καταλήγοντας στη σχέση

$$\int \sum \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \Delta \left(\frac{1}{2} m u_{CM}^2 \right) \quad (2)$$

Στην έκφραση αυτή, το ολοκλήρωμα της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης πάνω στο σύστημα επί τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του συστήματος ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας. Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (2) ονομάζεται «ψευδοέργο» από τους Petchina², Sherwood³ και

Mallinckrodt και Leff⁵. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται «έργο κέντρου μάζας» από τον Mungan.⁷

Η εξίσωση (2) ονομάζεται «θεώρημα ψευδοέργου-κινητικής ενέργειας» από τους Petchina² και Sherwood³. Ονομάζεται «εξίσωση για το κέντρο μάζας» από τους Sherwood και Bernard.⁴ Οι Chabay και Sherwood⁹ έχουν τροποποιήσει μια προγενέστερη μέθοδο που χρησιμοποιούσε αυτή την εξίσωση εφαρμόζοντας μια ενεργειακή αρχή σ' ένα «σύστημα υλικού σημείου», η οποία προσομοιώνει ένα σύστημα ως εάν όλη του η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας. Στην μέθοδο αυτή, η μετατόπιση που μας ενδιαφέρει είναι πάλι αυτή του κέντρου μάζας.

Οι εξισώσεις (1) και (2) χρησιμοποιούνται μαζί για να εισάγουν ένα αριθμό προβλημάτων στη βιβλιογραφία, για παράδειγμα σε άρθρα των Sherwood³ και Mungan.⁷ Πρόθεσή μου είναι σ' αυτό το άρθρο να επιχειρηματολογήσω ότι ούτε η εξίσωση (1) ούτε η (2) είναι το καλύτερο σημείο εκκίνησης για τους σπουδαστές ώστε να ξεκινήσουν μ' αυτού του τύπου τα προβλήματα, ή γι' αυτό τον λόγο, οποιουδήποτε τύπου ενεργειακό πρόβλημα. Ειδικότερα, η εξίσωση (2) είναι μια «ενεργοειδής» εξίσωση που μπορεί να οδηγήσει τους σπουδαστές σε ακόμα μεγαλύτερη σύγχυση. Δεν υπάρχει λόγος για την εισαγωγή μιας καινούργιας εξίσωσης σαν κι αυτή, ειδικότερα μιας που θα μπερδέψει τους σπουδαστές. Οι σπουδαστές που έχουν διδαχθεί με μια προσεκτικά δομημένη ενεργειακή μέθοδο έχουν ήδη τα εργαλεία που χρειάζονται για να λύσουν σύνθετα προβλήματα. Έτσι η προσέγγιση σ' αυτά τα προβλήματα είναι ευθεία και πρέπει να παρουσιάζεται ως τέτοια αντί να μπερδεύουμε την κατάσταση με την εισαγωγή αχρείαστων επιπλέον εξισώσεων.

Η εναλλακτική στο θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις στη διδασκαλία της έννοιας της ενέργειας ξεκινούν με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας και προχωρούν στην επέκταση της εξίσωσης προσθέτοντας νέους όρους καθώς συναντώνται νέες καταστάσεις. Αυτοί οι επιπρόσθετοι όροι συμπεριλαμβάνουν έργο που εκτελείται από μη συντηρητικές δυνάμεις, δυναμική ενέργεια, κτλ. Αυτού του είδους οι επεκτάσεις στο βασικό θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας είναι πολύ δύσκολο και να γίνουν κατανοητές από αρχάριους σπουδαστές φυσικής και να τις κάνουν μόνοι τους.

Προτιμώ να αφιερώσω χρόνο για να παρουσιάσω στους σπουδαστές μου μια σφαιρική μέθοδο της ενέργειας στη μηχανική και στη συνέχεια να περιορίσω την εξίσωση σύμφωνα με μια δεδομένη κατάσταση, όπως συζητήθηκε στο τέταρτο άρθρο¹⁰ αυτής της σειράς. Η σφαιρική εξίσωση είναι η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ):

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q + T_{MT} + T_{MW} + T_{ER} + T_{ET} \quad (3)$$

Είναι πολύ ευκολότερο για τους σπουδαστές να προσδιορίσουν τους όρους που δεν ανήκουν σε μια σαφώς γνωστή γενική εξίσωση απ' ότι είναι να εμφανίζονται νέοι όροι που πρέπει να προσθέτουν σε μια απλοποιημένη εξίσωση με την παραδοσιακή μέθοδο.

Οι σπουδαστές που διδάχτηκαν με τη σφαιρική μέθοδο για την ενέργεια δεν θα πάνε με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας όταν ξεκινούν μ' ένα νέο προκλητικό πρόβλημα, αλλά θα χρησιμοποιήσουν την εξίσωση (3). Σε πολλές περιπτώσεις, το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας δεν θα είναι κατάλληλο για να επιλυθεί το πρόβλημα, έτσι η σφαιρική μέθοδος κάνει το πρόβλημα επιλύσιμο.

Η εναλλακτική για το ψευδοέργο ή την εξίσωση για το κέντρο μάζας

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στη χρήση της εξίσωσης (2) για την επίλυση προβλημάτων σε συνδυασμό με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας. Υπάρχουν αρκετά μειονεκτήματα σ' αυτή την μέθοδο.

1. Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2) δεν είναι έργο γιατί η μετατόπιση στην εξίσωση είναι αυτή του κέντρου μάζας του συστήματος, όχι αυτή του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Ονομάζοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2) «ψευδοέργο» ή «έργο κέντρου μάζας», προτείνουμε με πολύ ισχυρό τρόπο ότι το ολοκλήρωμα είναι κάποια μορφή έργου. Ο καθηγητής που έχει προσδιορίσει προσεκτικά τη μετατόπιση στον ορισμό του έργου ως αυτή του σημείου εφαρμογής της δύναμης, θα έχει δυσκολία με την εξίσωση (2), γιατί θα παρουσιάσει στους σπουδαστές έναν όρο ο οποίος μοιάζει με έργο αλλά συμπεριλαμβάνει μετατόπιση που ορίζεται διαφορετικά.
2. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται³ ότι η εξ. (2) δεν είναι ενεργειακή εξίσωση γιατί προκύπτει από μια δυναμική εξίσωση, τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα. Οι σπουδαστές έχουν δυσκολία να το αντιληφθούν γιατί σίγουρα στην εξίσωση (2) το αριστερό μέλος μοιάζει με έργο και το δεξί με κινητική ενέργεια.
3. Στη διδασκαλία μας δίνουμε έμφαση στη σημασία της επίλυσης προβλημάτων με βάση θεμελιώδεις αρχές. Υπάρχει μόνο **μία** θεμελιώδης αρχή στην ενεργειακή μέθοδο: η διατήρηση της ενέργειας. Υπάρχει **μία** εξίσωση που σχετίζεται μ' αυτή την αρχή: Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας. Στη σφαιρική μέθοδο για την ενέργεια, η εξίσωση (1) είναι μια ειδική περίπτωση αναγωγής της γενικής εξίσωσης για τη διατήρηση της ενέργειας. Επειδή η εξίσωση (2) μοιάζει τόσο πολύ με ενεργειακή εξίσωση, οι σπουδαστές μπερδεύονται με το γεγονός ότι φαίνεται να χρησιμοποιούν δύο εξισώσεις σε μια ενεργειακή μέθοδο ενώ υπάρχει μόνο μία.

Αυτά τα μειονεκτήματα εξαφανίζονται εάν στη θέση της εξ. (2) χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική μέθοδος. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η εξ. (2) είναι **μαθητικά ισοδύναμη με το θεώρημα ώθησης-ορμής**, γιατί και τα δύο προκύπτουν από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα. Το θεώρημα ώθησης-ορμής,

$$\int \sum F_{\text{ext}} dt = m \Delta u_{\text{CM}} \quad (4)$$

μεταφέρει την ίδια πληροφορία με την εξίσωση για το κέντρο μάζας. Οι σπουδαστές **έχουν ήδη** το εργαλείο του θεωρήματος ώθησης-ορμής στην εργαλειοθήκη τους. Γιατί να εισαχθεί μια επιπλέον εξίσωση, η εξ. (2) όταν μεταφέρει την ίδια πληροφορία; Επιπλέον, γιατί να παρουσιάσουμε μια ενεργειακού τύπου εξίσωση στους σπουδαστές λέγοντάς τους ότι δεν είναι πραγματικά ενεργειακή εξίσωση;

Έτσι, στη μέθοδο ενέργειας/ορμής χρησιμοποιούμε το θεώρημα ώθησης-ορμής για την επίλυση προβλημάτων αντί της εξίσωσης ψευδοέργου ή κέντρου μάζας. Ο σπουδαστής είναι ήδη εξοικειωμένος μ' αυτή την εξίσωση, έτσι δεν υπάρχει λόγος να εισαχθεί μια καινούργια ενεργειακού τύπου εξίσωση που προκαλεί σύγχυση στην κατανόηση του έργου.

Η μέθοδος ενέργειας/ορμής

Στη μέθοδο ενέργειας/ορμής που συζητείται σ' αυτό το άρθρο, οι δύο εξισώσεις που χρησιμοποιούμε για τα προβλήματα είναι η εξίσωση ΑΔΕ (3) και το θεώρημα

ώθησης-ορμής (4) αντί των εξισώσεων (1) και (2) που χρησιμοποιούνται στην παραδοσιακή μέθοδο. Η μέθοδος ενέργειας/ορμής έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

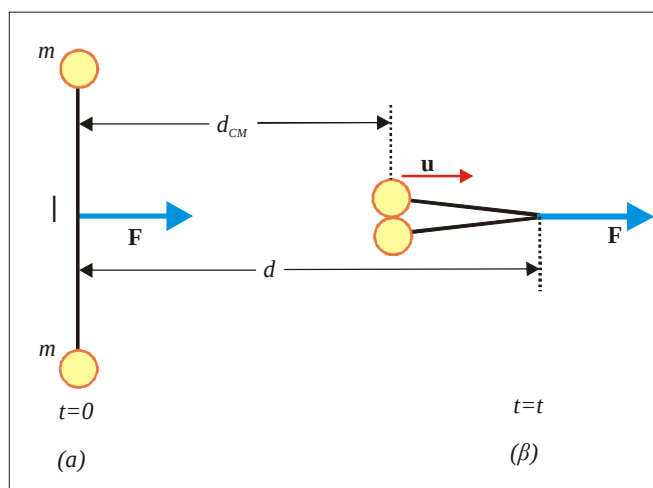
1. Δεν υπάρχει λόγος να εισαχθεί «ψευδοέργο» ή «έργο κέντρου μάζας». Υπάρχει μόνο μια μορφή έργου που εκτελείται πάνω σ' ένα σύστημα, το έργο υπολογίζεται με τον πρότυπο ορισμό.
2. Η εξίσωση (4) είναι φανερό ότι δεν είναι ενεργειακή εξίσωση έτσι δεν θα προκληθεί σύγχυση με άλλες πραγματικές ενεργειακές εξισώσεις.
3. Προβλήματα που συμπεριλαμβάνουν παραμορφώσιμα ή περιστρεφόμενα συστήματα μπορούν να λυθούν επιλέγοντας μια θεμελιώδη αρχή ενεργειακής μεθόδου, την ΑΔΕ, και μια αρχή με την ορμή, το θεώρημα ώθησης-ορμής.

Παραδείγματα εφαρμογής σε προβλήματα

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ενέργειας/ορμής θα παραθέσουμε τρία ενδεικτικά προβλήματα. Το πρώτο από τα προβλήματα παρακάτω είναι μια απλή περίπτωση που περιλαμβάνει ένα παραμορφώσιμο σύστημα και περιγράφεται από τον Sherwood.³

Πρόβλημα 1

Το σχήμα 1(α) δείχνει μια κάτοψη του αρχικού σχηματισμού 2 πεσσών μάζας m οι οποίοι βρίσκονται πάνω σε λεία επιφάνεια και συνδέονται μεταξύ τους με νήμα μήκους l και αμελητέας μάζας. Τη χρονική στιγμή μηδέν, μια σταθερή δύναμη μέτρου F αρχίζει να τραβάει προς τα δεξιά το μέσο του νήματος. Σε χρόνο t , οι δύο πεσσοί συγκρούονται και κολλάνε μεταξύ τους. Σ' αυτό τον χρόνο το σημείο εφαρμογής της δύναμης έχει μετακινηθεί κατά μία απόσταση d και οι πεσσοί έχουν αποκτήσει ταχύτητα μέτρου u όπως φαίνεται στο σχήμα 1(β). Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας u και πόση από την ενέργεια που προσφέρθηκε στο σύστημα από το περιβάλλον μετατράπηκε σε εσωτερική ενέργεια;



Σχ. 1. Δύο πεσσοί συνδέονται με νήμα μήκους l . Μία σταθερή δύναμη μέτρου F έλκει το κεντρικό σημείο του νήματος, αναγκάζοντας τους πεσσούς να κινηθούν προς τα δεξιά και ο ένας προς τον άλλον. Όταν συγκρούονται, η κρούση είναι πλαστική (*perfectly inelastic*).

Η λύση που περιγράφεται εδώ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τον Sherwood κάνοντας χρήση της μεθόδου ενέργειας/ορμής. Προσδιορίζουμε ως σύστημα τους δύο πεσσούς. Επειδή το σύστημα είναι παραμορφώσιμο, η απόσταση κατά την οποία

το κέντρο μάζας μετακινείται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας είναι διαφορετική από την απόσταση κατά την οποία μετακινείται το σημείο εφαρμογής της δύναμης F όπως φαίνεται στο σχήμα 1(β). Από το σχήμα αυτό (υποτίθεται ότι οι πεσσοί έχουν μηδενικό μέγεθος) βλέπουμε ότι $d_{CM} = d - l/2$.

Το γεγονός ότι η δύναμη πάνω στο σύστημα είναι σταθερή οδηγεί στη σταθερή επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος από $t=0$ μέχρι $t=t$. Για σταθερή επιτάχυνση του κέντρου μάζας και αρχική ταχύτητα μηδέν, η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει είναι η μισή της τελικής ταχύτητας. Έτσι, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μετακινηθεί το κέντρο μάζας κατά απόσταση d_{CM} από την ηρεμία σε τελική ταχύτητα μέτρου u είναι

$$\Delta t = \frac{d_{CM}}{u_{avg}} = \frac{d - l/2}{u/2} = \frac{2d - l}{u} \quad (5)$$

Τώρα, το θεώρημα ώθησης-ορμής, εξ. (4), μας δίνει

$$F \left(\frac{2d - l}{u} \right) = (2m)(u - 0) \quad (6)$$

Η εξίσωση (6) μπορεί να λυθεί ως προς u :

$$u = \sqrt{\frac{F(2d - l)}{2m}} \quad (7)$$

Η εξίσωση ΑΔΕ γι' αυτό το σύστημα ανάγεται στην

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W + Q + T_{MW} \quad (8)$$

όπου K είναι η συνολική κινητική ενέργεια των δύο πεσσών και ΔE_{int} είναι η αύξηση στην εσωτερική ενέργεια των πεσσών εξαιτίας της πλαστικής τους κρούσης. Το έργο W εκτελείται πάνω στο σύστημα από τη δύναμη F . Με τον όρο Q αναπαριστάται η μεταφορά ενέργειας με θερμότητα από τους θερμούς (μετά την κρούση) πεσσούς στον περιβάλλοντα αέρα και την επιφάνεια, και η T_{MW} αναπαριστά τη μεταφορά ενέργειας με ήχο από τους πεσσούς λόγω της κρούσης. Ας υποθέσουμε ότι οι τελευταίοι δύο όροι είναι αμελητέοι¹¹ έτσι ώστε η εξίσωση ΑΔΕ ανάγεται στην

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W \quad (9)$$

Η εξίσωση αυτή σύμφωνα με τα δεδομένα μας μπορεί να γραφεί

$$\left[\frac{1}{2}(2m)u^2 - 0 \right] + \Delta E_{int} = F \cdot d \quad (10)$$

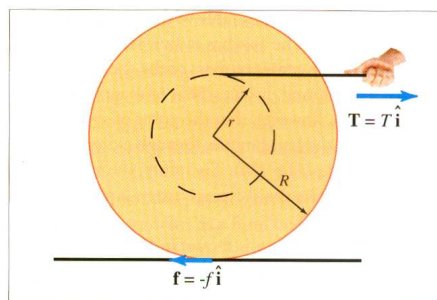
Λύνουμε την εξίσωση ως προς ΔE_{int} και αντικαθιστούμε την u από τη σχέση (7):

$$\Delta E_{int} = F \cdot d - \frac{1}{2}(2m) \frac{F - (2d - l)}{2m} = F \cdot d - F \left(d - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} F \cdot l \quad (11)$$

Τα επόμενα δύο ενδεικτικά προβλήματα προτάθηκαν από τον Mungan⁷ και παρουσιάστηκαν στο πρώτο άρθρο⁸ αυτής της σειράς. Ο Mungan επιλύει τα προβλήματα εισάγοντας έννοιες όπως «έργο κέντρου μάζας» και «σωματιδιακό έργο». Όπως δείχνεται πιο κάτω δεν υπάρχει λόγος για την εισαγωγή νέου τύπου «εργοειδών» ποσοτήτων: ο σπουδαστής που έχει διδαχθεί τη μέθοδο ενέργειας/ορμής που περιγράφηκε πριν έχει ήδη τα εργαλεία για να επιλύσει το πρόβλημα.

Πρόβλημα 2

Θεωρείστε τη φυσική κατάσταση που δείχνεται στο σχήμα 2. Ένα καρούλι με κυλινδρική συμμετρία έχει μάζα m και ακτίνα R και ηρεμεί σε οριζόντιο τραπέζι με τριβή. Το καρούλι έλκεται προς τα δεξιά με σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου T από ένα χέρι μέσω σχοινιού αμελητέας μάζας το οποίο είναι τυλιγμένο στον άξονα του καρουλιού ακτίνας r . Ως αποτέλεσμα το καρούλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει για μια απόσταση L κατά μήκος του τραπεζιού. Υπολογίστε (α) το μέτρο της τελικής μεταφορικής ταχύτητας του καρουλιού και (β) το μέτρο της δύναμης τριβής f .



Σχ. 2. Ένα καρούλι ακτίνας R έλκεται με δύναμη T μέτρου T η οποία ασκείται σε νήμα τυλιγμένο στον άξονα του καρουλιού ακτίνας r . Το καρούλι είναι σε επαφή με οριζόντιο τραπέζι που ασκεί δύναμης τριβής f μέτρου f . Το καρούλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Ο Mungan λύνει το ερώτημα (α) χρησιμοποιώντας την εξ. (1) στην οποία αποκαλεί το έργο W «σωματιδιακό έργο». Η ονομασία αυτή ενδεχομένως μπερδεύει τους σπουδαστές γιατί το καρούλι ξεκάθαρα δεν είναι σωματίδιο. Η μέθοδος ενέργειας/ορμής ξεκινά από την εξίσωση ΑΔΕ, εξ. (3), αναγνωρίζοντας ότι το έργο που εκτελείται στο σύστημα καρουλιού και νήματος από το χέρι έχει ως μόνο ενεργειακό αποτέλεσμα στο σύστημα την κινητική ενέργεια. Η εξίσωση ΑΔΕ σ' αυτή την περίπτωση ανάγεται στην εξίσωση (1). Η κινητική ενέργεια του συστήματος έχει δύο μέρη, την μεταφορική κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και την περιστροφική κινητική ενέργεια γύρω από το κέντρο μάζας:

$$W = \Delta K = \Delta K_{trans} + \Delta K_{rot} \quad (12)$$

Αν το κέντρο μάζας του συστήματος μετακινείται με μετατόπιση μέτρου L , το σημείο εφαρμογής της δύναμης που ασκείται στο νήμα από το χέρι μετακινείται για μετατόπιση μέτρου $L(1+r/R)$. Έτσι η εξίσωση (12) μας δίνει

$$TL(1 + \frac{r}{R}) = \frac{1}{2}mu_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (13)$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του καρουλιού ως προς το κέντρο μάζας του. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση $\omega = u_{CM}/R$ παίρνουμε

$$u_{CM} = \sqrt{\frac{2TL(1 + \frac{r}{R})}{m(1 + \gamma)}} \quad (14)$$

όπου $\gamma = l/(mR^2)$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με του Mungan και απαιτεί μόνο την πρότυπη εξίσωση για τη διατήρηση της ενέργειας που χρησιμοποιείται στην σφαιρική μέθοδο.

Για το δεύτερο ερώτημα, ο Mungan χρησιμοποιεί δύο εξισώσεις, το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για το κέντρο μάζας και μια περιστροφική εκδοχή του θεωρήματος έργου-κινητικής ενέργειας. Ο συνδυασμός των δύο αυτών εξισώσεων οδηγεί στο αποτέλεσμα του Mungan:

$$f = \frac{\gamma - \frac{r}{R}}{1 + \gamma} T \quad (15)$$

Στη μέθοδο έργου/ενέργειας, εφαρμόζουμε μία εξίσωση, το θεώρημα ώθησης-ορμής, στο σύστημα:

$$(T-f) \Delta t = m \cdot (u_{CM} - 0) = m \cdot u_{CM} \quad (16)$$

Το γεγονός ότι η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή οδηγεί σε σταθερή επιτάχυνση του κέντρου μάζας του καρουλιού. Όταν ένα αντικείμενο ξεκινά από την ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση, η μέση ταχύτητά του είναι ίση με το μισό της τελικής του ταχύτητας. Έτσι, το χρονικό διάστημα στο οποίο το κέντρο μάζας μετακινήθηκε κατά L από την ηρεμία μέχρι μια τελική ταχύτητα u_{CM} είναι:

$$\Delta t = \frac{L}{u_{CM, avg}} = \frac{2L}{u_{CM}} \quad (17)$$

Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση (16) γίνεται

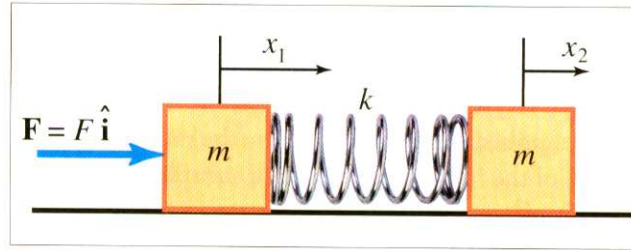
$$(T - f) \frac{2L}{u_{CM}} = m \cdot u_{CM} \quad (18)$$

Επιλύοντας την εξίσωση αυτή ως προς f και αντικαθιστώντας την u_{CM} από την εξ. (14) παίρνουμε την εξ. (15).

Πρόβλημα 3

Όπως δείχνεται στο σχήμα 3, δύο άκαμπτα σώματα, μάζας m το καθένα, ηρεμούν σ' ένα επίπεδο, λείο τραπέζι. Συνδέονται μέσω ελατηρίου αμελητέας μάζας και σταθεράς k . Η απόσταση των σωμάτων όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος είναι L . Κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος Δt , μια σταθερή δύναμη μέτρου F ασκείται οριζόντια στο αριστερό σώμα μετακινώντας το κατά μία απόσταση x_1 . Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος αυτού, το δεξί σώμα μετακινείται προς τα δεξιά κατά απόσταση x_2 . Μετά το χρονικό διάστημα Δt , η δύναμη παύει να ασκείται. Βρείτε (α) το μέτρο της τελικής ταχύτητας του συστήματος ελατηρίου και σωμάτων και (β) την ολική ενέργεια που συνδέεται με τη

ταλάντωση (vibration) ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος μετά την κατάργηση της δύναμης F .



Σχ. 3. Δύο σώματα μάζας m συνδέονται μέσω ελατηρίου σταθεράς k . Το σύστημα ηρεμεί, με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος, πάνω σε λείο τραπέζι. Μια σταθερή δύναμη F μέτρου F ασκείται στο αριστερό σώμα, μετακινώντας το κατά απόσταση x_1 . Στο χρονικό διάστημα αυτό, το ελατήριο αναγκάζει το δεξί σώμα να μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά μια απόσταση x_2 .

Ο Mungan και πάλι χρησιμοποιεί εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το έργο του κέντρου μάζας και το σωματιδιακό έργο για να επιλύσει τα (α) και (β). Παρόλο που αυτές οι δύο εξισώσεις επιτρέπουν την επίλυση των δύο ερωτημάτων σε δύο γραμμές για το καθένα, αισθάνομαι ότι οι λύσεις κοστίζουν στην εννοιολογική κατανόηση του σπουδαστή εξαιτίας της χρήσης πρόσθετων ενεργειακού τύπου εξισώσεων. Για να λύσουμε το ερώτημα (α) με τη μέθοδο ενέργειας/ορμής, εφαρμόζουμε το θεώρημα ώθησης-ορμής στο σύστημα του ελατηρίου και των δύο σωμάτων. Από την εξ. (4) αναγνωρίζοντας ότι η δύναμη F είναι σταθερή στο χρονικό διάστημα που ασκείται,

$$F \Delta t = (2m)(u_{CM} - 0) = 2mu_{CM} \quad (19)$$

Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt , το κέντρο μάζας του συστήματος μετακινείται κατά μία απόσταση $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ με σταθερή επιτάχυνση. Έτσι,

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{u_{CM,avg}} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}u_{CM}} = \frac{(x_1 + x_2)}{u_{CM}} \quad (20)$$

Αντικαθιστώντας το Δt στην εξ. (15) παίρνουμε

$$u_{CM} = \sqrt{F \frac{(x_1 + x_2)}{2m}} \quad (21)$$

Για να βρούμε την ενέργεια ταλάντωσης στο ερώτημα (β), εφαρμόζουμε την ΑΔΕ στο σύστημα του ελατηρίου και των δύο σωμάτων. Ξέρουμε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος μπορεί να γραφτεί $K = K_{CM} + K_{vib}$, όπου K_{vib} είναι η κινητική ενέργεια των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας εξαιτίας της ταλάντωσής τους. Έτσι, η εξίσωση ΑΔΕ γίνεται

$$\Delta K_{CM} + \Delta K_{vib} + \Delta U_{vib} = W \quad (22)$$

όπου U_{vib} είναι η ελαστική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο όταν η απόσταση των σωμάτων έχει κάποια τιμή διαφορετική από L . Διαπιστώνοντας ότι $K_{vib} + U_{vib} = E_{vib}$ και ότι οι αρχικές τιμές της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της ενέργειας ταλάντωσης είναι μηδέν, η εξίσωση αυτή γίνεται,

$$K_{CM} + E_{vib} = F \cdot x_1 \quad (23)$$

Σημειώστε ότι το έργο που εκτελείται πάνω στο σύστημα είναι το γινόμενο της δύναμης F και της μετατόπισης μέτρου x_1 του σημείου εφαρμογής αυτής της δύναμης. Έτσι,

$$E_{vib} = Fx_1 - K_{CM} = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m)u_{CM}^2 \quad (24)$$

Αντικαθιστώντας την u_{CM} από την (21), βρίσκουμε

$$E_{vib} = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m) \left[F \frac{(x_1 + x_2)}{2m} \right] = F \frac{x_1 - x_2}{2} \quad (25)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και τα τρία προβλήματα που εξετάστηκαν περιελάμβαναν σταθερές δυνάμεις, κάτι που επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό του χρονικού διαστήματος Δt . Η μέθοδος ενέργειας/ορμής παραμένει ξεκάθαρη αν η δύναμη που ασκείται σ' ένα σύστημα μεταβάλλεται με τον χρόνο με γνωστό τρόπο· το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (4) μπορεί να υπολογιστεί για μια τέτοια δύναμη. Εάν η δύναμη μεταβάλλεται με τη θέση μ' έναν γνωστό τρόπο η λύση γίνεται περισσότερο προβληματική. Από την άλλη, ένα πρόβλημα που ένα παραμορφώσιμο ή περιστρεφόμενο αντικείμενο κάτω από την επίδραση μιας δύναμης που μεταβάλλεται με τη θέση ξεπερνάει πιθανότατα το εισαγωγικό επίπεδο μαθημάτων Φυσικής. Σε τέτοια προβλήματα, εάν η δύναμη είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση της θέσης, το σύστημα μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει και τον παράγοντα που εξασκεί τη δύναμη. Η δύναμη είναι τώρα εσωτερική σ' ένα απομονωμένο σύστημα και μπορεί να αναπαρασταθεί με μία δυναμική ενέργεια. Στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ανάλυση του απομονωμένου συστήματος για να βρεθεί η λύση.

Συμπέρασμα

Οι ενεργειακές μέθοδοι στα προβλήματα συμπεριλαμβάνουν προκλήσεις για τους σπουδαστές. Οι προκλήσεις αυτές γίνονται ακόμα πιο δύσκολες εάν παρουσιάζονται με μια περιορισμένη άποψη με τη χρήση μόνο του θεωρήματος έργου-ενέργειας και στη συνέχεια εξειδικευμένες εκδοχές του θεωρήματος και πρόσθετες ενεργειακού τύπου εξισώσεις. Θα πρέπει να ξοδευτεί αρκετός χρόνος κατά τη διάρκεια του μέρους της μηχανικής σ' ένα εισαγωγικό μάθημα για να συζητηθεί η σφαιρική ενεργειακή προσέγγιση και να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση προβλημάτων.

Για προβλήματα που συμπεριλαμβάνουν παραμορφώσιμα ή περιστρεφόμενα συστήματα, η χρήση του θεωρήματος ώθησης-ορμής αντί μιας εξίσωσης ψευδο έργου, σωματιδιακού έργου, ή κέντρου μάζας έχει διακριτά πλεονεκτήματα. Η χρήση

του θεωρήματος ώθησης-ορμής επιτρέπει στους σπουδαστές να χρησιμοποιήσουν μια αρχή της ορμής που ήδη γνωρίζουν μαζί με την εξίσωση ΑΔΕ από την ενεργειακή μέθοδο, χωρίς να υπάρχει ανάγκη για πρόσθετες ενεργειακού τύπου εξισώσεις.

Αναφορές

1. H. Erlichson, "Work and kinetic energy for an automobile coming to a stop," *Am. J. Phys.***45**, 769 (Aug. 1977).
2. C.M. PENCHINA, "Pseudowork-energy principle," *Am. J. Phys.***46**, 295-296 (March 1978).
3. B.A. Sherwood, "Pseudowork and real work," *Am. J. Phys.***51**, 597-602 (July 1983).
4. B.A. Sherwood and W.H. Bernard, "Work and heat transfer in the presence of sliding friction" *Am. J. Phys.* **52**, 1001-1007 (Nov. 1984)
5. A.J. Mallinckrodt and H.S. Leff, "All about work," *Am. J. Phys.***60**, 356-365 (April 1992).
6. H.S. Leff and A.J. Mallinckrodt, "Stopping objects with zero external work: Mechanics meets thermodynamics," *Am. J. Phys.***61**, 121-127 (Feb. 1993).
7. C.E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics," *Phys. Teach.***43**, 10-16 (Jan. 2005).
8. J.W. Jewett, "Energy and the confused student I: Work," *Phys. Teach.* **46**,38-43 (Jan. 2008).
9. R.W. Chabay and B.A. Sherwood, "Bringing atoms into first year physics," *Am. J. Phys.***67**, 1045-1050 (Dec. 1999).
10. J.W. Jewett, "Energy and the confused student IV: A global approach to energy," *Phys. Teach.* . **46**, 210-217 (April 2008).
11. Ο Sherwood εξαλείφει τους όρους της θερμότητας και του ήχου συμπεριλαμβάνοντάς τους στην εσωτερική ενέργεια $E_{εσωτ.}$. Ενώ η προσέγγιση αυτή δίνει το ίδιο μαθηματικό αποτέλεσμα, βρίσκω ότι υποφέρει από τον συνδυασμό μορφών μεταφοράς ενέργειας έξω από το σύστημα (θερμότητα, ήχος) με μια μορφή ενεργειακής αποθήκευσης (εσωτερική ενέργεια).